Provincia de Tierra del Fuego,
Antártida e Islas del Atlántico Sur
Ministerio de Educación, Cultura,
Ciencia y Tecnología
Dirección Provincial de Diseño, Gestión y Evaluación Curricular

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
CULTURA, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

PARTICIPACIÓN, REFLEXIONES Y APORTES PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL DISEÑO CURRICULAR DEL CICLO BÁSICO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

MATEMÁTICA

Documento borrador para la consulta

Equipo Areal Jurisdiccional

Prof. Teresa Antista

Prof. Claudia Wortley

Julio 2011

Segunda Versión de documento borrador, se solicita no difundir ni citar.

ÍNDICE

PENSAR LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA...

Las aulas de las escuelas medias de nuestra provincia están pobladas de diversidad. Diversidad de conocimientos, de cultura, de intereses, habilidades, etc., donde los jóvenes parecieran estar cada vez más lejos de los conceptos que ¨tenemos que impartir¨. Los ¨profes¨ sentimos muchas veces que los alumnos ¨no saben lo básico¨, ¨no recuerdan ni las tablas¨….Asimismo, la palabra de los jóvenes se escucha por los pasillos y se evidencia en las mesas de examen cuando abundan los desaprobados y aparece el estigma escolar con el que carga el área: ¨es difícil¨, ¨no la entiendo y nunca la voy a entender¨, ¨es para unos pocos¨.

Por momentos es arduo pensar ¨una¨ matemática para esas aulas. Sin embargo, creemos que podemos poblarlas de ¨**mucha producción y conocimiento matemático**¨. Nuestros jóvenes responden con entusiasmo cuando apostamos a ellos, cuando confiamos plenamente en sus potencialidades, cuando les planteamos desafíos apropiados y les ofrecemos un espacio para que los enfrenten. Es decir, se ¨enganchan¨ y puede sorprendernos la calidad de las estrategias que despliegan ante las diversas situaciones que se les propongan. Es parte de nuestra responsabilidad por un lado, el demostrarles que la matemática es para todos y que todos pueden aprenderla y, por el otro, en formar jóvenes críticos, autónomos y con los saberes necesarios para afrontar los cambios vertiginosos de la sociedad actual. Estos cambios requieren de sujetos capaces de interrogarse sobre diferentes problemáticas que se les plantearan y de apropiarse de conocimientos nuevos. Como docentes es importante que nos esforcemos y nos comprometamos en brindarles las mejores condiciones educativas a nuestros alumnos para el logro de estos objetivos.

La diversidad en los alumnos, que obedece a razones culturales, sociales, regionales, etc., proporciona a las aulas una riqueza que nos remite a deliberar respecto de nuestras prácticas de enseñanza. Atender a esta diversidad de formas de aprender implica que debamos considerar prácticas de enseñanza que brinden una apropiada respuesta a dicha variedad. A pesar de que en mayor o menor medida nos hemos acercado a la lectura de otras formas de pensar la enseñanza, existen prácticas que persisten en el tiempo, que se resisten a los cambios y que responden a un modelo de enseñanza que ya no resulta fértil y empobrece los aprendizajes. Hacer demasiada referencia a éstas, es reseñar lo ya conocido. Así ¨aprendimos¨ la matemática que conocemos y así hemos ¨dirigido¨ nuestra acción docente durante mucho tiempo. Generalmente enseñamos los números, las operaciones, las ecuaciones a través de una ejercitación repetitiva y formal y luego proporcionamos los problemas para que los alumnos ¨los apliquen¨. Presentamos la matemática como un saber acabado, donde prima la enseñanza mecánica de técnicas y algoritmos, básicamente desprovista de significados. En este contexto los alumnos aprenden en principio copiando, reproduciendo y ejercitando. Esta concepción supone que hay una sola manera de aprender matemática y por lo tanto una sola manera de enseñarla.

Si bien estas prácticas nos muestran en lo cotidiano que aportan cada vez menos a lo complejo de la clase y se alejan de nuestros alumnos, no conciliamos con una transformación donde se postule que ¨no sirve nada de lo que hacemos ¨ o ¨ que hay que cambiarlo todo¨. Por el contrario, necesitamos tiempos y espacios de discusión para revisar nuestras prácticas, revalidar aquellas que resultan fecundas y construir e incluir otros modos de enseñar que impliquen cambios profundos, es decir, que posibiliten la ***construcción de aprendizajes con sentido***. Acordamos también, con preservar parte de estas rutinas, como por ejemplo ¨los clásicos ejercicios¨ ya que son necesarios en procesos de consolidación y sistematización de técnicas o conceptos.

Ahora, vamos a aludir a otra forma de enseñar y aprender la matemática que creemos necesaria que esté presente, y de las condiciones para que se dé a lugar. La misma, nos provee una manera particular de pensar y producir conocimiento. Desde esta esfera, asumimos la matemática como un sistema teórico que permite conocer y modelar la realidad de una cierta manera. Como una obra, una construcción social y cultural de la humanidad y por tanto, posible de transmitir a las nuevas generaciones. Asumimos también que hay muchas maneras de entender las ideas matemáticas, muchas aproximaciones para adquirir conocimientos matemáticos y muchas bases para desarrollar actividades matemáticas.

Para puntualizar en la producción de conocimiento matemático, necesitamos primero hablar del *trabajo de un matemático*. Una de las actividades del matemático consiste en tomar un problema de la realidad o de la matemática misma, un problema abierto y acotarlo. Buscar un modelo más simplificado que lo represente, para así poder, ¨*trabajar*¨ sobre el modelo y hacer predicciones sobre la realidad. El problema planteado es para él un desafío intelectual. Para resolverlo plantea conjeturas, argumenta, genera varias estrategias de resolución, experimenta, investiga, simboliza, valida, demuestra, se plantea nuevas preguntas,…, también disfruta, juega, produce nuevos conocimientos y cuando está seguro de su producción la anuncia ante la comunidad científica.

Podemos equiparar la tarea del alumno en el aula, con aquella que muestran los matemáticos en su actividad creadora.

La idea sería entonces que la actividad de aprender matemática en el aula esté relacionada con el quehacer matemático recién descripto de manera sintética y simplificada; **asumiendo lo complejo y prolongado de esta tarea**.

Esto será posible si se opta por un enfoque que ponga la resolución de problemas en el centro del trabajo.

Entendemos por ¨**problema**¨ una situación matemática que implique para los alumnos un obstáculo a resolver. El problema debe responder a campos de conocimiento específicos dentro de las matemáticas (fracciones, proporcionalidad, geometría, álgebra, etc.). El problema debe provocar a los alumnos, desafiarlos y ponerlos en acción en forma colectiva y/o individual. Una situación donde la respuesta ¨les salte a la vista¨ no será un problema para ellos, será solo un enunciado de fácil solución. El problema debe permitirles desplegar los saberes que poseen y posibilitarles reconocer que estos saberes les resultan insuficientes; obligándolos a generar nuevos conocimientos, modificando y evolucionando los que hasta entonces poseían. El problema debe ser seleccionado de forma tal que el conocimiento que se quiere que aprendan aparezca como la solución óptima.

Los problemas pueden ser del ámbito de la vida cotidiana, de otras ciencias o de la matemática misma (extra e intramatemáticos). Pueden ser abiertos que admitan varias soluciones o cerrados que se responden con una sola.

Hay que plantear situaciones matemáticas que permitan la actividad de modelización. En la misma los alumnos identifican datos o variables, establecen relaciones entre ellas, y producen algún modelo (conocido o no) que les permita explicar la situación y resolverla. Los modelos son centrales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en tanto funcionan como herramientas flexibles de representación, operación y razonamiento. Por ejemplo ante el problema: E*xpresa el número 10 como la suma de dos números naturales. ¿Hay una única solución? Indica todas las soluciones que encuentres.* Un modelo posible para explorar la situación es la expresión a + b = 10.

Si como docentes estamos dispuestos a crear escenarios apropiados para que los alumnos se involucren en la resolución de problemas, al hacerlo se pondrán en juego ¨otros contenidos¨ diferentes de los que estamos acostumbrados a enseñar.

Desde este ángulo **los alumnos** dispuestos en grupo, en tanto exploran una situación despliegan diferentes estrategias de resolución. Ponen en juego ideas; buscan diversos caminos; formulan preguntas y emiten respuestas, tienen la oportunidad de equivocarse y de mejorarlas; debaten sobre una afirmación, pueden probarla o rechazarla; analizan la validez o no de determinados caminos elegidos o la razonabilidad de un resultado, etc. Construyen conocimientos, representaciones matemáticas y las relaciones implicadas entre ellos. **Producen y aprenden un quehacer matemático escolar**.

Es decir, la idea no es solo reducir la actividad del alumno a encontrar la solución de un problema, sino que debe llegar a la producción y sistematización del conocimiento a través de procesos grupales o individuales de reflexión, favorecidos y guiados por la intervención docente.

No queremos desteñir esta idea con frases trilladas tales como ¨enseñar matemática a través de problemas¨ y que los problemas pasen a ser un ¨ejercicio más a practicar¨ en la clase. Por el contrario, son los problemas los que proveen de significado a los conceptos y los que posibilitan en los alumnos la **construcción de conocimientos con sentido.**

Brousseau (1983) nos orienta al respecto, definiendo el sentido de un conocimiento:

[…] no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma […]

En cierta forma este es también uno de los desafíos para nosotros, los docentes, diseñar o buscar situaciones; actividades, juegos, enunciados, cuentas, etc. que permitan a los alumnos construir sentidos de un conocimiento; establecer el para qué sirve, como así también los límites de su utilización.

En la clase se espera que los docentes **organicemos momentos bien diferenciados** que permitan el devenir de los distintos quehaceres, admitiendo lo complejo de la actividad áulica, donde se privilegie la problematización del conocimiento. En concordancia con los que propone Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas podemos sugerir instancias de interacción que alberguen el espectro de situaciones posibles a atender. *Un momento*, en que los alumnos se encuentren con la situación problemática a resolver; en éste es conveniente que dispongan tanto de espacios individuales como grupales y que comprendan, sin lugar a la ambigüedad, lo que se les solicita en la misma. *Otro momento*, en que se involucren con la resolución de la situación; se formulen y se respondan preguntas, prueben, ensayen, busquen estrategias conocidas, desestimen otras, exploren nuevas y encuentren algún camino que los conduzca a elaborar respuestas. Nosotros como docentes, debemos intervenir, mediar, repreguntar, ejemplificar siempre que sea conveniente para desanudar momentos de bloqueos, estancamientos, desinterés, etc. *Otro* *momento*, en que les propongamos hacer una ¨puesta en común¨; acá tendrán que contar a sus compañeros lo que hicieron, de tal forma que quede registro de la traza de lo producido. *Otro momento*, será aquel en que los docentes retomemos las producciones elaboradas y las pongamos a consideración de todos; surgirán instancias de validación y reflexiones grupales; propiciaremos el reconocimiento de las maneras de resolver más apropiadas, proponiendo una tarea de revisión de aquellas que no resultaron tan funcionales y de otras que pueden manifestarse como no acertadas. Dosificaremos nuestra intervención acorde al interés que tengamos en que surjan o se instalen algunas nociones y en relación a las conclusiones que el grupo clase vaya construyendo. Y en algún *otro momento*, somos también los encargados de avalar, legitimar e instalar las ideas, las conjeturas, los argumentos y los procedimientos producidos, aunque sean parciales e incompletos y los alumnos sepan que volveremos sobre ellos cuando sea necesario. Estos momentos pueden ser parte de una misma clase o de clases diferentes. Asimismo debemos pensarlos como instancias que no responden a un modelo secuencial de trabajo, es decir, podemos considerar varias clases donde sólo focalicemos en la ¨comunicación¨ de ideas, procedimientos, representaciones, etc.

La **tarea de enseñar**, desde esta perspectiva, pareciera ser un reto desmedido. Es el docente el que debe conocer los conceptos, sus propiedades, representaciones y las relaciones implicadas entre ellos. Es el que debe diagnosticar con la mayor precisión posible las nociones de sus alumnos, cómo operan, cómo piensan, cómo resuelven. Es el que debe seleccionar el repertorio de problemas donde anclen los conocimientos, las técnicas, las representaciones que pretendemos que surjan como respuestas. Es el que debe gestionar la clase de modo tal que en la misma se habiliten espacios de discusión colectiva, de producción de ideas, de interpretación de procedimientos y representaciones ajenas, de comparación y análisis de las diferentes representaciones producidas, de promoción de procesos de generalización, de reflexión y más… Es también el que debe decidir en qué momento intervenir y de qué modo, cuál es la afirmación, la negación o la pregunta más adecuada para que irrumpan las herramientas y los conocimientos necesarios. Es el que debe asegurarse de que en su clase esté permitido equivocarse, aceptar críticas, revisar lo ya hecho, proponer ideas, disentir, jugar, divertirse… y más también. Esto parece desmesurado, sólo si lo presuponemos como un docente pensando solo y aislado acerca de su accionar.

La idea es revisar nuestras propuestas de enseñanza a través de un **trabajo cooperativo**. Es en el colectivo donde lo espinoso se transforma en viable. Hace falta difundir un espíritu abierto a la revisión y al cambio, donde poco a poco se promuevan mejoras que se reflejen en las aulas y en la calidad de los aprendizajes. **Comenzar en conjunto gradualmente**, leer bibliografía específica, recopilar y adaptar problemas que respondan a uno o varios dominios del conocimiento matemático (decimales, porcentaje, volumen, etc.), deliberar en relación a su implementación, compartir experiencias buenas y frustrantes, seleccionar material apropiado, leer investigaciones sobre el aprendizaje de un contenido en particular, producir e interpretar registros de clases, etc. Éstas son algunas de las prácticas que podemos iniciar en equipo. Necesitamos corrernos de la singularidad, sostener la tarea de enseñar como un quehacer compartido, como una construcción social, que nos permita desencadenar propuestas válidas para nuestros jóvenes. En la medida que nos introducimos en el ámbito de la didáctica específica, se nos devela ¨una matemática desconocida¨; que nos invita a profundizar, resignificar y poner en discusión nuestros propios saberes. Con el correr del tiempo podremos adquirir experiencia y comenzar a hilar más fino, a tratar de reparar en todas las sutilezas, (en cómo formulamos las preguntas; si variamos un dato, en que varía el problema; en escuchar e interpretar las preguntas de los alumnos, etc.)... y a disfrutar de la actividad áulica en la cual nos ¨encontramos¨ docentes y alumnos. Estos espacios de reflexión en conjunto nos conducen **a producir y aprender un quehacer matemático - docente.**

Hay otros aspectos que también debemos contemplar más allá del paradigma de enseñanza que elijamos pronunciar en nuestras clases. Específicamente nos referimos a la **actividad lúdica y al uso de recursos variados**. Ninguno asegura por sí sólo el aprendizaje; pero suelen ser fuertes colaboradores a la hora de originar procesos de exploración, de elaboración de estrategias, de validación, de reflexión, de generalización, entre otros.

Si nuestro interés está puesto en desarrollar la cultura matemática en nuestros alumnos, aquí también la historia nos devela un itinerario. Para ello tendremos que ponerlos a practicar **juegos matemáticos**. Demás está aclarar la relación duradera y divertida que el juego permite establecer entre los sujetos y el conocimiento. Lo que caracteriza básicamente a un juego es que impone un desafío, viene de la mano de un conjunto de reglas, que está acompañado de sentimientos de tensión y alegría y es lo más próximo al acto creador. Hay muchas coincidencias entre la actividad matemática y la práctica de jugar; en este sentido ganar una jugada o afrontar la provocación, sería un equivalente a la resolución de un problema matemático. Por ejemplo, si al jugar desplegamos una estrategia la usaremos mientras nos resulte oportuna, y hasta tanto nuestro oponente nos muestre una manera de ganarnos; en ese momento nos veremos obligados a profundizar en la reflexión y en la búsqueda de nuevas estrategias. Éstas son sólo algunas de las ventajas que podemos considerar al momento de introducir un determinado juego en nuestra clase. Al hacerlo debemos tener en claro qué es lo que pretendemos enseñar y qué función va a cumplir (pueden ser varias). Pero para nuestros alumnos, lo importante, es que se incorporen a la actividad de manera espontánea, que la disfruten y que se involucren con el desafío propuesto sin necesidad de que conozcan la intencionalidad didáctica del juego planteado. Podemos recurrir a un juego para introducir un concepto, para comprenderlo o para reforzarlo; para perfeccionar habilidades por ejemplo de cálculo mental; para estimular el pensamiento, etc. Hay una gran variedad de juegos a utilizar, más adelante propondremos algunos que se luzcan en algún dominio del conocimiento matemático en particular.

Retomemos ahora al otro aspecto a considerar, el uso de **variados recursos y materiales**. Cuando hablamos de recursos y materiales estamos haciendo referencia desde las representaciones gráficas (dibujos, esquemas, cuadros, etc.), los clásicos útiles de geometría (escuadra, regla transportador, compás), mecanos, varillas, cuerpos sólidos, cuerpos transparentes, hasta los software más conocidos (cabri, geogebra, derive, etc.). Existen algunos mitos difundidos tanto entre docentes como en los alumnos referidos a que ¨el material concreto¨ se emplea sólo en los primeros grados de la escolaridad descalificando por completo los beneficios de su adopción en los ciclos superiores. Los materiales y recursos son excelentes mediadores para contribuir a construir aprendizajes con sentido. La experiencia demuestra cada vez más que un uso variado de los mismos es muy fructífero, aportando a los alumnos un mayor grado de autonomía, y una mejor capacidad para dar sentido y profundizar en sus conocimientos. Al respecto debemos tener en cuenta que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas de forma que la mente tenga la posibilidad de operar con tales representaciones. A su vez, existe una dependencia entre las representaciones internas y los modelos externos que usamos para expresar esas ideas o conceptos. No hay un único material o representación capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto encierra, es conveniente conocerlos y predecir las bondades que cada uno proporciona, ya que ineludiblemente cada uno destaca alguna propiedad importante del concepto representado y quizás dificulta la comprensión de otras.

No podemos dejar de mencionar la manera en que consideramos **los errores** de los alumnos. Al respecto, nos orientan los trabajos desarrollados por Bachellard (1934), Brousseau (1978). Estamos acostumbrados a relacionar el error de los alumnos con procedimientos incorrectos o concepciones que deben desestimar. Cuando aparecen, repetimos nuestra explicación, o les damos más ejercitación hasta que la aprendan y no vuelvan a surgir. Generalmente no los analizamos ni les atribuimos ninguna función dentro del proceso de enseñanza. Cabe pensar que podemos calar un poco más hondo, asignándole al error un papel más preponderante en la clase. Si los alumnos no comprenden lo que hacen, no pueden tener una actitud reflexiva sobre su actividad y esto los conduce a elaborar hábitos mecánicos, que persisten en el tiempo en los que no hay posibilidad de situar el error. Sin embargo puede conseguirse que el error juegue un papel importante, si se le hace funcionar como motor de la acción y de la reflexión en situaciones apropiadas. En la medida en que le demos al error un valor dentro del proceso de enseñanza, habilitaremos canales donde los alumnos puedan en grupo revisar sus estrategias, provocando una reflexión y un debate en el que se dan cuenta de lo inadecuado de algunas respuestas y reconocen la necesidad de reelaborar nuevos métodos o nuevos conceptos. Vuelven a la acción para ver por qué no les ha salido bien permitiendo un proceso de reconstrucción social de sus propios quehaceres, rectificando o no sus modos de proceder. En algunas oportunidades los momentos de trabajo colectivo se pueden utilizar para promover el análisis de errores con la finalidad de involucrar a la mayor parte de la clase en la elaboración de explicaciones que permitan revisarlo. Ante el error de los alumnos, es conveniente que nuestras estrategias de intervención se remitan a acompañarlos a superar el obstáculo, a darle sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas.

A modo de cierre vamos a explicitar también, como el trabajo centrado en la resolución de problemas encadena en su quehacer, aunque el docente no se lo proponga, la enseñanza de **importantes actitudes**. *El respeto y la tolerancia por las ideas, opiniones y capacidades ajenas*, ya que para vincularse con la situación planteada deben considerar los conocimientos, las posibilidades e intereses de cada compañero. *La autonomía intelectual*, ya que cada uno tiene la oportunidad de expresar sus ideas, sus maneras de hacer, todas las respuestas tienen cabida. *La capacidad de escucha*, ya que deben atender en forma especial el punto de vista de los compañeros tanto para lograr metas propias como grupales. *La cooperación*, ya que las propuestas grupales les implica un trabajo permanente con el otro en la acción y en la reflexión. *La búsqueda de consensos*, ya que les permite avanzar en la obtención de respuestas comunes. *La valorización de procesos propios de la matemática*, ya que faculta a la argumentación, la validación y la demostración como garantía de sus propios pensamientos.

PROPÓSITOS

- Brindar la oportunidad de revisar, profundizar y usar los saberes que poseen los alumnos como punto de partida para acceder a conocimientos nuevos y a procesos de pensamiento superiores.

- Proporcionar a los alumnos instancias de reflexión individual y/o grupal que impliquen el desarrollo de capacidades propias del quehacer matemático para producir, validar y comunicar ideas y conocimientos matemáticos.

- Favorecer en los alumnos la confianza en sus propias capacidades y generar actitudes positivas hacia las matemáticas para instalar en ellos la certeza de que a través del estudio, el esfuerzo y la perseverancia todos pueden aprenderla.

- Incentivar en los alumnos, a través del quehacer matemático escolar, actitudes propias del trabajo cooperativo para fortalecer sus aprendizajes durante su escolarización.

- Facilitar a los alumnos el uso de juegos y de recursos variados tales como útiles de geometría (reglas, escuadras, compases, transportadores), software geométrico, varillas, etc.; para favorecer la construcción de aprendizajes con sentido.

- Proponer a los alumnos situaciones que les permitan copiar, construir, representar y analizar cuerpos y figuras geométricas para afianzar el estudio de sus propiedades y el de sus relaciones métricas.

- Promover en los alumnos el reconocimiento de escrituras numéricas equivalentes como modo de representar cantidades, relaciones numéricas, etc.; para que seleccionen el uso más conveniente acorde a las estrategias de cálculo (mental, escrito o con calculadora) y al contexto presentado.
.

- Habilitar en los alumnos la elaboración de estrategias personales de modelización que representen las relaciones funcionales presentes en diferentes fenómenos (extra e intramatemáticos) para seleccionar el modelo más pertinente que les permita explicar la situación y resolverla.

- Plantear a los alumnos situaciones que les permitan analizar, explicitar y producir fórmulas sobre regularidades geométricas y aritméticas para abordar procesos propios del trabajo algebraico.

- Proveer a los alumnos de situaciones cotidianas que les permitan interpretar y construir el proceso estadístico (recolectar, organizar y graficar) y experimentar sucesos con diferentes grados de probabilidad para elaborar hipótesis y conclusiones apropiadas referidas al contexto analizado.

CRITERIOS DE SELECCIÓN, ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Consideramos como referentes válidos para la selección de los ejes y contenidos los NAP (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios), con esto se anhela que contribuyan a asegurar una base común a todo el Sistema Educativo Provincial y Nacional priorizando la unidad dentro del mismo.

Asimismo tomamos como importantes insumos a la hora de definir los contenidos los documentos curriculares provinciales vigentes, tales como ¨Diseño Curricular EGB3¨ versión 1.0. (1998); ¨ Guía de Planificación Curricular¨ (2003); ¨Anexo de la Guía de Planificación Curricular¨ (2003) y los aportes de los docentes Provinciales del Nivel Primario y Secundario ¨planificaciones 2010¨.

Otro aspecto que determinó la priorización de los contenidos, es el de recuperar y sistematizar, en el primer año, saberes que los alumnos fueron construyendo en el paso por su escuela primaria. Es decir, la decisión es la de retomar aquellos contenidos ya vistos, que les resulten familiares y solo explorar algunos nuevos. Ya en el segundo y tercer año, los jóvenes deben desarrollar habilidades del pensamiento inductivo y el deductivo formal, así como incorporar un vocabulario específico y simbólico cada vez más riguroso y preciso. Por esto, algunos conocimientos se ¨mostrarán¨ en una primera instancia de una forma más intuitiva, permitiendo posteriormente retomar las aristas más formales necesarias para acceder a la ¨calidad requerida¨, ya que es en la escuela secundaria donde se comienzan a abordar procesos superiores del pensamiento matemático.

Los contenidos están divididos en cuatro ejes que responden a campos de conocimiento específicos dentro de las matemáticas, **los relacionados con la Geometría y la Medida ; los relacionados con el Número y las Operaciones; los relacionados con el Algebra y las Funciones y los relacionados con la Probabilidad y la Estadística.**

Esta división en ejes nos permite una organización de los contenidos que facilita su presentación y lectura. Como ya explicitamos anteriormente no se trata de abordarlos en forma aislada. Si centramos el trabajo con figuras geométricas, es forzosa la utilización de números naturales, decimales o fraccionarios, como también, muchos de los significados atribuibles a los números forman parte del mundo de las medidas. Es decir, a la hora de pensar una propuesta de enseñanza surgen contenidos que involucran a más de un eje. Tampoco se piensa en un tratamiento secuencial de los mismos.

Vemos así, como los contenidos de los diferentes ejes, el numérico, el funcional, o el geométrico entran en un juego dialéctico, que en la mayoría de los casos se nutren unos con otros facultando un recorrido apropiado en pos de facilitar la construcción de sentidos en los aprendizajes.

En cada uno de los contenidos propuestos se aspira a que se contemple la enseñanza del quehacer propio de la actividad matemática. Esto es, ***la producción, validación y comunicación del conocimiento a través de la resolución de problemas***.

En el aprendizaje de este quehacer se encuentran dos tipos de saberes, uno del orden más general y otro más específico. Los saberes del orden general refieren al desarrollo de habilidades, capacidades y actitudes tales como el razonamiento, la modelización, la producción de ideas y estrategias, la reflexión, la capacidad de escucha, de aceptar ideas de otros, etc. Los saberes más específicos aluden a campos de conocimientos bien determinados dentro de las matemáticas y a los modos propios de pensamientos asociados a ellos (lo numérico, lo geométrico, lo métrico, entre otros).

Asimismo, reiteramos la idea de que la ¨forma¨ en que presentamos los contenidos, determinan el estilo de enseñanza que pretendemos priorizar, y que la concepción de matemática que tiene un currículum, una institución, un docente, interviene en el modelo de enseñanza propuesto, deseado, realizado.

Siguiendo una idea de P. Sadovsky, optamos por considerar que no es posible separar el ¨qué enseñamos¨ del ¨cómo lo enseñamos¨. Dicho con sus palabras:

[…] Detrás de la idea de que existe un ¨qué¨ claro y transparente, hay una perspectiva de la matemática como hecho natural que se contrapone con nuestra visión de la matemática como construcción social y cultural. La mirada de la matemática como hecho natural no admite que frente a una misma problemática se puedan proponer diversos puntos de vista, no reconoce que aquello que se estudia en la disciplina y que finalmente queda instituido es producto de las decisiones de los hombres que trabajan en ella. […]

Siguiendo esta idea procuramos presentar conjuntamente los contenidos y sus recomendaciones didácticas, imprimiendo una misma unidad de sentido.

CONTENIDOS Y RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS

GEOMETRÍA Y MEDIDA

Con la geometría tenemos una deuda pendiente, en los últimos años ¨ha permanecido ausente¨ en las aulas. Tal es así, que a pesar de la manifiesta intención de los actuales currículos de reflotarla, seguimos negándole el status que se merece. Siempre priman otros contenidos, urge lo numérico, lo algebraico… desmereciendo tanto las características propias del trabajo geométrico como los aportes que brinda en estos otros terrenos. Es además una de las más fuertes portadoras de situaciones para el desarrollo de habilidades de pensamiento, justamente en este nivel donde se plantea la enseñanza del proceso de la demostración.

Proponemos un quehacer centrado en la construcción, el juego, la manipulación, la representación y la visualización como medio para sistematizarlo. Estas situaciones permitirán reanudar los conocimientos geométricos de los alumnos, desde un nivel intuitivo hasta un nivel donde se profundice en el análisis de las propiedades y sus relaciones. El papel que juegan los recursos y materiales es básicamente el de posibilitar la exploración y visualización de regularidades, propiedades, relaciones, características, generar imágenes mentales, etc.; que desencadenen procesos de resolución, generalización, entre otros.

Debemos revalorizar las situaciones de construcción que permiten la entrada a los alumnos en un trabajo de razonamiento y al manejo de las propiedades y relaciones asociadas al posterior abordaje de las demostraciones.

Al respecto, no exigimos que los alumnos produzcan ¨demostraciones formales¨, tal como las entendemos en matemática, este es también un proceso largo y complejo. En el ciclo básico procuramos que se involucren con una aproximación a estas tareas. Es esperable en un comienzo que nos encontremos con justificaciones incompletas y argumentaciones imprecisas; podremos encausarlos a producciones más formales a través de intercambios y reflexiones grupales.

1º año	2º año	3º año
CUERPOS • Resolver problemas de identificación de semejanzas y diferencias entre diferentes cuerpos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas). • Analizar sus características explicitando las relaciones más usuales de inclusión jerárquica. • Copiar y construir diferentes cuerpos reflexionando sobre sus características generales y en sus propiedades específicas. • Construir desarrollos planos de los diferentes cuerpos tratados a partir de situaciones de armado y desarmado de los mismos. **FIGURAS** • Profundizar el estudio de las propiedades de los triángulos, cuadriláteros y círculos a partir de situaciones de construcción y copiado. • Elaborar conjeturas acerca de las condiciones necesarias (referidas a los lados, ángulos, diagonales) que posibilitan la construcción de un cuadrilátero. • Elaborar y explicitar la propiedad de	**CUERPOS** • Resolver problemas de clasificación de cuerpos (poliedros y redondos) analizando sus características generales. • Construir e identificar diferentes cuerpos a partir de sus desarrollos planos analizando las propiedades generales y particulares de cada uno. **FIGURAS** • Construir distintos polígonos a partir de elementos dados, justificar los procedimientos utilizados, y analizar las propiedades particulares y generales de los mismos. • Elaborar conjeturas acerca de las condiciones necesarias (referidas a los lados y ángulos) que posibilitan la construcción de un triángulo. • Determinar en los triángulos puntos que cumplan condiciones referidas a distancias, y construir medianas, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos. • Explorar y argumentar a través de diferentes construcciones de triángulos las condiciones necesarias y suficientes para su	**FIGURAS** • Construir la noción de lugar geométrico a partir de la construcción y justificación de circunferencias, círculos, rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, circunferencia que pasa por tres puntos, etc. • Construir figuras semejantes a partir de diferentes informaciones y recursos geométricos. • Identificar y argumentar las condiciones necesarias y suficientes de semejanza de figuras utilizando las nociones de razón de semejanza y relación entre áreas. • Interpretar las condiciones de aplicación del teorema de Thales e indagar y validar propiedades asociadas. • Caracterizar las relaciones trigonométricas de seno, coseno y tangente. • Resolver problemas de cálculo de lados y/o ángulos de triángulos rectángulos usando las relaciones trigonométricas y la pitagórica. • Formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con

la suma de los ángulos interiores y exteriores de un cuadrilátero y de triángulo. • Elaborar criterios sobre las relaciones de inclusión jerárquica más usuales de cuadriláteros, partiendo del análisis de sus propiedades. • Formular conjeturas sobre las relaciones entre distintos tipos de ángulos a partir de las propiedades del paralelogramo: opuestos por el vértice, adyacentes y los determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. • Producir argumentos que validen las relaciones entre los distintos tipos de ángulos abordados. **MEDIDA** • Resolver problemas de perímetros y áreas de diferentes tipos de figuras planas (simples y compuestas), seleccionando la unidad adecuada acorde a las figuras y la situación planteada; • Justificar la variación del perímetro y el área de una figura en función de la variación de la forma y de la variación de la medida de sus lados; • Establecer relaciones entre fórmulas calculando el área de figuras usuales a partir de otras ya conocidas;	congruencia. • Resolver situaciones de análisis de triángulos rectángulos, en los cuales las medidas de sus lados sean ternas pitagóricas. • Explorar algunas situaciones de resolución de triángulos rectángulos. • Interpretar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras a partir de equivalencias de áreas. **MEDIDA** • Resolver problemas de áreas laterales y totales de diferentes cuerpos. • Elaborar estrategias personales de cálculo del volumen de diferentes cuerpos a partir del área de sus bases y sus alturas. • Utilizar la equivalencia de las unidades de longitud, superficie y volumen argumentando sobre la conveniencia de la unidad elegida acorde a la situación propuesta.	sus ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que las validen. **MEDIDA** • Resolver problemas de cálculo de volúmenes de distintos cuerpos. • Explorar las relaciones entre cuerpos con igual área lateral y distinto volumen o con el mismo volumen y distintas áreas laterales. • Utilizar la equivalencia entre las unidades de capacidad, peso y volumen argumentando sobre la conveniencia de la unidad elegida acorde a la situación propuesta. • Resolver problemas que involucren distintas magnitudes. • Argumentar y justificar el uso, la elección de la unidad y la forma de expresión más conveniente del sistema sexagesimal de medición de ángulos; en situaciones de trigonometría y resolución de triángulos rectángulos.

• Utilizar la equivalencia de las unidades de longitud y superficie argumentando sobre la conveniencia de la unidad elegida acorde a la situación propuesta;		

Se ofrecerán problemas variados que permitan analizar propiedades de los cuerpos (cantidad de caras, formas de sus caras, vértices, aristas, etc.). El trabajo con las construcciones como medio para explorar las propiedades no sólo permite identificar las relaciones entre datos y las propiedades específicas sino que dan pie a una exploración más sistemática de las propiedades generales y de la clasificación de los cuerpos; como por ejemplo, el paralelismo entre las caras de un cuerpo, las caras planas, las caras congruentes, etc.

El trabajo con los desarrollos planos de los cuerpos propicia la lectura de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y desarrollan la percepción espacial y la visualización concreta de dichos cuerpos. Para ello es muy conveniente trabajar con habilidades vinculadas al dibujo y a la reproducción de planos de los cuerpos. Se podría comenzar con situaciones sencillas en donde los alumnos desarmen y vuelvan a armar diferentes cuerpos y dispongan de momentos de reflexión para analizar los desarrollos planos encontrados.

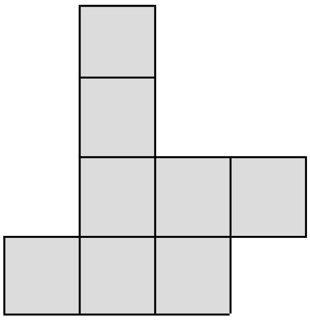
Las actividades de dictado de figuras y copiado a partir de pedir datos generan construcciones, que habilitan al alumno a buscar las relaciones y los elementos necesarios para realizar las mismas. Se pretende habilitar un espacio de exploración y de búsqueda de argumentos acerca de las condiciones necesarias y suficientes para la construcción de las figuras pedidas. En todas estas posibles resoluciones existe un trabajo exploratorio, de ensayo y error, de intentos de explicar lo que sucede: es decir que la idea de que los alumnos infieran para tratar de ver si se arma la figura o no, siempre está presente.

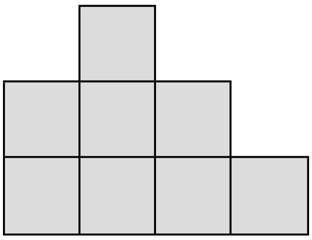
Las siguientes propuestas son sólo orientadoras. Seleccionamos varias que permiten ejemplificar situaciones donde se focaliza el copiado, la construcción, la comunicación, la argumentación, etc.; actividades propias del quehacer geométrico, privilegiando siempre un tratamiento integral de los contenidos.

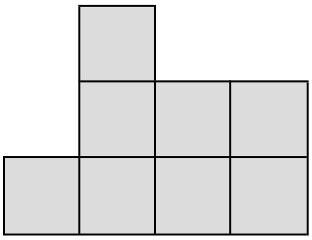
- *Usando cartulina, tijera y cinta adhesiva construya:*

a) *Tres pirámides con distintas bases.*
b) *Un cuerpo redondo con dos bases.*

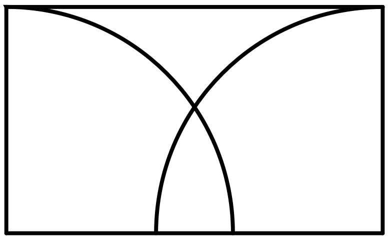
- *Construyan, usando dados o cubos (hechos previamente con cualquier material), un cuerpo cuyos planos de la base, del frente y del costado se dan a continuación.*


Base

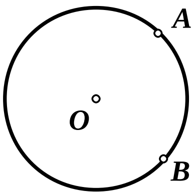

Vista de frente


Vista de costado

- *Escribí las instrucciones para que tú compañero pueda reproducir la siguiente figura utilizando útiles de geometría (regla, escuadra y compás):*



- *Si en la siguiente circunferencia unimos los puntos AOB, ¿podemos asegurar sin medir que el triángulo que se forma es isósceles?*



Las siguientes situaciones son muy interesantes para que los alumnos las puedan explorar con algún software de geometría dinámica. También pueden hacerlo con útiles de geometría, aunque el proceso de producción es mucho más largo.

- *Dados los siguientes segmentos m y n:*

m ________________ *n* __________

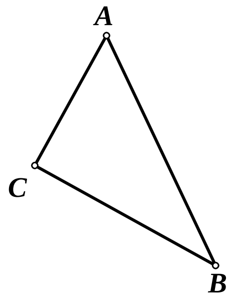
Construir un triángulo en el cuál dos de sus lados tengan la misma medida que m y n respectivamente. ¿Se puede construir más de un triángulo con los datos dados? ¿Por qué?

- *Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. Y sean M, N, P, y Q los puntos medios de cada uno de los lados. Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir los puntos M, N, P, y Q.*

Para continuar con el trabajo matemático propuesto es necesario apuntar al estudio de problemas y propiedades de los cuerpos y de las figuras, que permitan establecer criterios generales. Este tipo de trabajo que se dirige a la generalización necesita ir avanzando de a poco, con el fin de que los acercamientos que propongamos admitan modos de representaciones distintas y formas de demostraciones progresivas, incluyendo la idea de progresión o concreción que tendrá una propiedad general o particular. Las actividades más propicias para comenzar son aquellas que demandan la construcción o la determinación de medidas "sin medir", las cuales permiten comprobar si ciertos cuerpos o figuras existen a partir de información dada sobre las bases y caras si se tratase de cuerpos, o sobre lados y ángulos si se tratase de figuras. Podemos comenzar a realizar un trabajo paulatino en el caso de las figuras partir de los cuadriláteros utilizando información de lados, ángulos y diagonales, a la vez que el empleo de diferentes instrumentos geométricos, los cuales posteriormente por su uso servirán para el análisis de las propiedades de variadas figuras.

A continuación se presenta una serie de actividades que pueden orientar algunas de las prácticas que los alumnos deben llevar a cabo para ir acercándose a lo propuesto en el párrafo anterior:

- *Construir un rectángulo usando regla no graduada y compás, sabiendo que el siguiente triángulo es la mitad del rectángulo que tiene como una de sus diagonales el lado AB*

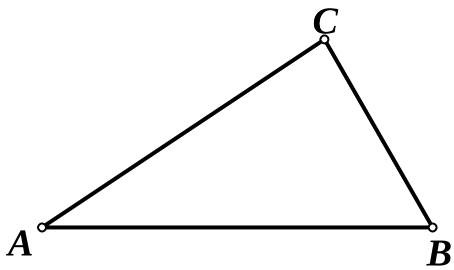


- *Utilizando la misma medida de la diagonal del rectángulo construido anteriormente, construí otro rectángulo usando regla y escuadra.*

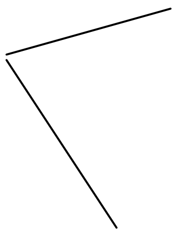
a) ¿Cuántos rectángulos distintos podrás construir teniendo como diagonal al segmento AB? ¿Por qué?

b) ¿Y si AB fuera la diagonal de un cuadrado?

- *Este triángulo es la mitad de un paralelogramo. En él una de sus diagonales es AC . Construir el paralelogramo usando regla y escuadra.*



- *Con estos lados construí un paralelogramo, usando regla y compás.*



a) ¿Qué diferencia hay entre los lados de los dos últimos paralelogramos dibujados? ¿Y entre los ángulos?
b) ¿Las medidas de las diagonales de dichos paralelogramos miden lo mismo entre sí?
- Construir un paralelogramo en el cual uno de los lados mida 5 cm el otro 3 cm y la diagonal 8 cm.
a) ¿Qué dato modificarías para construir el paralelogramo? ¿Por qué?

- Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mida 7 cm y los ángulos adyacentes midan 50° y 130º ¿Es posible? ¿Son suficientes estos datos para construir uno solo?
- Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mida 5 cm y los ángulos adyacentes midan 50° y 110°. ¿Es posible?
- ¿Es necesario establecer alguna condición respecto a los ángulos de un paralelogramo?
- Construir un paralelogramo que tenga una diagonal de 5 cm y otra de 3 cm ¿Es posible construir más de un paralelogramo que cumpla estas condiciones?

- ¿Será cierto que si se conocen tres datos de un paralelogramo, la construcción que se puede realizar es única?

a) Específica en qué casos no es posible construirlo;

b) En qué casos podemos obtener más de uno;

c) En qué casos solo obtenemos uno.

- Si los datos son el valor de tres lados uno de 4cm, otro de 6 cm y tercero de 3cm. ¿Cuántos paralelogramos son posibles de construir?

- Si disponemos de una diagonal de 5 cm , otra de 4 cm y uno de sus lados de 3 cm. ¿cuántos paralelogramos podemos construir?
- Si los datos ahora son una diagonal de 6 cm, la otra diagonal de 2cm y la medida de uno de los lados de 3cm ¿Cuántos paralelogramos son posibles construir?
- Construye un paralelogramo del cual sabemos que el ángulo que forman las diagonales es de 120° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 6 cm. ¿Sólo es posible construir uno?
- Indica qué modificarías en los dos últimos enunciados para que se dieran todas las condiciones y se pudieran construir los paralelogramos pedidos.

La secuencia presentada previamente sólo intenta mostrar como desde el trabajo con las construcciones se puede comenzar a explorar las propiedades de las figuras, a través de las relaciones que se pueden dar entre: datos y propiedades; datos y cantidad de soluciones; datos y posibles soluciones, entre otras. Estas actividades pueden ser simplificadas o complejizadas para el trabajo en las aulas, de manera que se adecuen a las posibilidades, intereses y necesidades del grupo de alumnos.

La tarea exploratoria ayuda a los alumnos a acercarse intuitivamente a las propiedades de cuerpos y de figuras, apelando a las mediciones y construcciones descubriendo aquellas que estaban presentes y no les prestaban atención, es decir que comienzan a hacerlas visibles; en otros casos este trabajo permitirá poner en palabras lo que está implícito, es decir explicitar la o las propiedades; en otros casos estas situaciones habilitan a tomar decisiones sobre características o descripciones ya conocidas para posteriormente verificar la validez de alguna o algunas propiedades mediante la demostración de las mismas, lo cual llevará otro tipo de trabajo acorde a la propiedad que se quiera demostrar.

Cuando se trabaja con los paralelogramos, también se puede comenzar a tratar las relaciones que se dan entre ángulos entre paralelas cortadas por una transversal, abordando la compleja tarea de validar resultados y afirmaciones que se proponen; se debe tener en cuenta, que en algunas oportunidades el docente deberá interferir para ayudar a los alumnos a obtener las explicaciones necesarias de las razones por las cuales se obtiene algún resultado, que ellos por sus propios medios no pudieron elaborar.

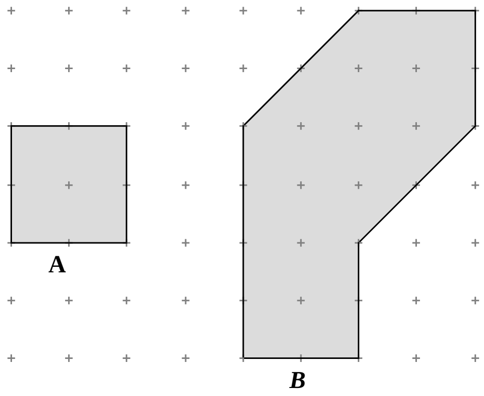
En los años posteriores se propone continuar con el trabajo a partir de actividades de copia con regla y compás en el estudio de la circunferencia, las cuales servirán como el punto de partida para tratar los triángulos y desde allí comenzar un trabajo que apunte a la congruencia de triángulo, el cual permitirá elaborar nuevas relaciones que se dan entre los elementos de un triángulo (entre los lados, entre los lados y los ángulos, entre los ángulos), y validar las afirmaciones que surjan de dichas relaciones. A la vez que continuar el trabajo de construcción de triángulos no sólo desde los lados y los ángulos sino a partir de alturas, medianas y bisectrices, para profundizar y conocer las relaciones que se dan entre estos elementos que forman a los triángulos. También se sugiere utilizar problemas que apunten a identificar ciertas relaciones geométricas que se establecen entre figuras, cuando se trata de amplificar o simplificar las figuras sin que estas pierdan su forma. Aquí el trabajo apunta a ser más integral porque se estudia no sólo lo que tenga que ver con los elementos de las figuras sino con el perímetro y el área de las mismas, por ello la importancia de trabajar en forma paralela la geometría y la medida; para realizar este trabajo es necesario comenzar con actividades que tengan que ver con los triángulos para que posteriormente se puedan elaborar condiciones que involucren la semejanza de cuadriláteros, aquí el criterio de semejanza entre triángulos también permitirá abordar el Teorema de Thales; no se debe olvidar que dichas actividades siempre apuntan a las construcciones, las cuales permiten elaborar conjeturas y comenzar con la búsqueda de argumentos que validen o no las mismas.

En cuanto a la medida, se propondrán situaciones donde los alumnos podrán poner en marcha diferentes recursos para medir o comparar perímetros y áreas, inicialmente pueden recurrir al uso de recursos muy sencillos como son el contar cuadraditos, plegar, superponer, etc. Es oportuno proponer actividades que pongan en juego a través de transformaciones la invariabilidad de cada una de las magnitudes con las que estamos trabajando (longitud y superficie).
Es importante la exploración de la variación del perímetro y del área de una figura cuando varían las dimensiones de sus lados o cuando varían las formas de las mismas. Es pertinente ofrecer problemas en los cuales se puedan identificar la conservación de cada concepto en forma independiente uno del otro.

No se pretende el trabajo con las fórmulas convencionales. A partir de la fórmula del rectángulo podrán explorar las de otras figuras. Es decir podrán deducir que el triángulo es la mitad del rectángulo, que el rombo está formado por cuatro triángulos, etc., la idea es trabajar las nuevas fórmulas como derivadas de otras. Recordemos que para obtener el área de figuras más complejas podemos recurrir a la descomposición o a la transformación de las mismas en figuras más simples.

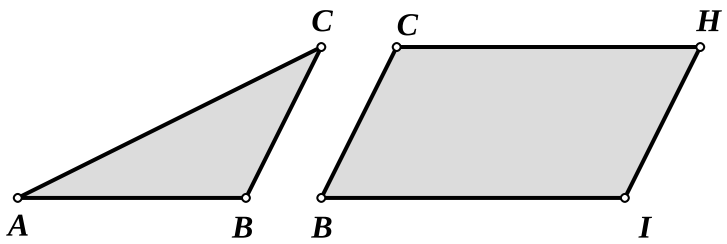
Es conveniente considerar tanto números naturales como, fraccionarios y/o decimales para la medida de los lados de los rectángulos. El cálculo del área de un rectángulo provee de significados al producto de fracciones (producto de medidas). *Recordemos que uno de los ejes del enfoque de trabajo propuesto es el tratamiento integral de los contenidos*. En éste caso la medida es portadora de significados de los números fraccionarios. Consideramos necesario trabajar diversas situaciones que les permitan a los alumnos entender y elaborar diversas escrituras equivalentes que representen la medida de un área (por ej.: m^2 o cm^2) o de un perímetro (por ej.: km o m) y puedan seleccionar la más conveniente acorde al contexto presentado.

Este tipo de situaciones posibilitan integrar propiedades geométricas y métricas de las distintas figuras y compararlas



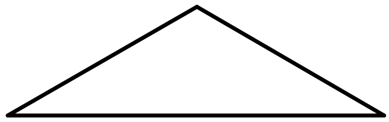
- *¿Con cuántas tarjetas A obtengo la superficie de la figura B?*

- *El área del triángulo ABC es de 3 cm^2 y el área del paralelogramo BIHC de 8cm^2. Si unimos ambas figuras haciendo coincidir el lado BC de ambas,:*



a) ¿Podemos asegurar que el área de la figura total es de 11 cm^2?
b) ¿El perímetro de la figura total, sería igual a la suma de los perímetros de cada una de ellas?
c) Justifica en cada caso tu respuesta.

- *Con 12 piezas triangulares como ésta*



Armar, usándolas todas:

- *Un triángulo equilátero.*
- *Cuatro triángulos equiláteros congruentes.*
- *Tres rombos.*

- *Todos los paralelogramos posibles.*
- *Una estrella de seis puntas.*
- *Tres romboides.*
- *Un trapecio.*

Analiza que pasa con el área y con el perímetro de las figuras construidas

La secuencia de actividades propuestas permite orientar el tipo de trabajo que se pretende por un lado explorar y tratar la independencia que se dan entre el perímetro y el área de las figuras, al igual que la independencia entre las magnitudes que intervienen, sus equivalencias no haciendo un trabajo sólo desde lo numérico sino en las unidades que representan las distintas medidas que intervienen. También el trabajo debe estar dirigido a relacionar distintos contenidos que se involucran en el desarrollo de este eje como: la proporcionalidad directa e inversa; los distintos campos numéricos (naturales, fraccionarios y decimales); las operaciones entre ellas la multiplicación y la división respecto de la relación a x b= c en el contexto del área de un rectángulo; el algebra en un comienzo, de forma exploratoria introduciendo las letras que permitan habilitar el trabajo con formulaciones generales más económicas, las cuales deberán ser interpretadas por los alumnos y en años posteriores producidas por ellos, el trabajo de validación y argumentación será a partir del análisis de los dibujos o de las expresiones aritméticas que representen cada situación.

Los problemas que refieren a los cuerpos y la medida servirán de soporte para explorar las relaciones que se dan entre los distintos elementos que forman un cuerpo, para luego identificar las propiedades de los mismos y comenzar un trabajo que apunte a descubrir nuevas relaciones que involucren el cálculo de áreas laterales y totales de los mismos. Las actividades para continuar con este trabajo deben ser basadas en la construcción, lo cual le permite a los alumnos reconocer y analizar propiedades de los cuerpos, para posteriormente argumentar y validar el uso y la producción de fórmulas que le permitan realizar dichos cálculos en forma económica. En cuanto al volumen de los cuerpos, los primeros problemas no deben apuntar a determinar la unidad de medida que se necesita para trabajar el concepto de volumen porque la exploración se realizará utilizando cubos iguales que forman a los cuerpos y por ello pueden ser contados, a continuación se propone ir avanzando sobre la elaboración de fórmulas sencillas que tendrán como sustento lo trabajado en relación a las propiedades de los cuerpos; en forma paulatina se irán incorporando las medidas de volumen y sus equivalencias para comenzar con el análisis de la independencia de la variación del volumen respecto de la variación al área lateral y total de los mismos, esto también permite ir analizando el uso de letras en las fórmulas de volumen y el análisis de la proporcionalidad directa e inversa por parte de los alumnos.

NÚMEROS Y OPERACIONES

En **el campo numérico y operatorio** se pretende el planteo de situaciones problemáticas tendientes a profundizar la construcción de conceptos preferentemente dentro de los números racionales. El funcionamiento de los números racionales supone disoluciones con relación al de los números naturales, especialmente en las operaciones y, en particular, en la multiplicación y la división. No se busca que los alumnos repitan el uso de algoritmos memorizados, sino que tengan la oportunidad de desplegar estrategias "personales" que les permitirán una reconstrucción de algoritmos ya conocidos pero probablemente no comprendidos.

Las situaciones deben brindar la posibilidad de afrontar los distintos significados de los números fraccionarios; como parte de un todo, reparto, razón entre dos números, cociente indicado, operador. El abordaje a través de la resolución de problemas admite un planteo integral de los conceptos. En las situaciones de proporcionalidad, por ejemplo, donde la constante sea un número fraccionario, podemos revisar el significado de las fracciones como operador. A su vez, el uso de las propiedades de la proporcionalidad directa para resolver las situaciones, permitirán generar procedimientos personales para la multiplicación o división de naturales, de una fracción por un número natural o por otra fracción y comprender los algoritmos más formales. Otro ámbito disponible para plantear el producto de fracciones es en el cálculo de áreas de figuras (producto de medidas).

Se ofrecerán también situaciones donde el uso de la calculadora, recursos de software o material manipulativo, sean los más aptos para realizar las exploraciones numéricas.

1º año	2º año	3º año
NÚMEROS NATURALES • Resolver situaciones de composición y descomposición de números en forma aditiva, multiplicativa y polinómica. • Explicitar y argumentar la selección del tipo de cálculo seleccionado (mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin calculadora) y evaluar la razonabilidad del resultado en la resolución de situaciones problemáticas. • Analizar y comunicar relaciones y propiedades de la suma, la resta y multiplicación en sus diferentes significados. • Analizar, argumentar el uso de las relaciones entre dividendo, divisor cociente y resto al resolver diversas situaciones. • Usar cuadrados, cubos y raíces exactas en diferentes situaciones. • Producir cálculos que combinen varias operaciones en relación con un problema y producir un problema en relación con varios cálculos combinados. • Resolver ejercicios combinados sencillos teniendo en cuenta la jerarquía y las propiedades de las operaciones y las reglas de uso del paréntesis.	**NÚMEROS ENTEROS** • Resolver situaciones de interpretación y producción de números **enteros** en diferentes contextos: como número relativo (temperaturas, nivel del mar) y a partir de la resta de dos naturales (juego de cartas, pérdidas y ganancias). • Comparar **números enteros**, hallar distancias entre ellos y **ordenarlos** en situaciones con diferentes significados, utilizando la recta numérica. • Elaborar estrategias personales de cálculo de suma y resta de números enteros en contextos con diferentes significados. • Resolver situaciones de multiplicación y división con números enteros. • Usar las operaciones con enteros en contextos de cálculo y/o con diferentes significados, analizando los signos correspondientes al resultado obtenido. • Explicitar y justificar las propiedades de las **operaciones básicas en Z** como extensión de las elaboradas en N. • Resolver problemas de cálculos combinados sencillos con **números enteros**, teniendo en cuenta la jerarquía y las propiedades de las operaciones y las reglas del	**DIVISIBILIDAD CON NÚMEROS ENTEROS** • Analizar la estructura de un cálculo referido a nociones de divisibilidad con números enteros. • Analizar las nociones de divisibilidad en N extendidas a Z. **NÚMEROS REALES** • Resolver situaciones de cálculo de raíces con números racionales, interpretando sus diversas escrituras. (exponente a/b). • Justificar el uso de las propiedades de la potenciación con racionales en la resolución de problemas de cálculo. • Analizar y argumentar las estrategias utilizadas al operar con números racionales. • Seleccionar y justificar la representación y el cálculo más acorde a la situación planteada, evaluando la razonabilidad del resultado e incluyendo su redondeo y encuadramiento. • Interpretar y producir **números irracionales** en contextos de diferentes significados. • Argumentar acerca del uso del valor

DIVISIBILIDAD • Resolver problemas que involucren las nociones de múltiplo y divisor de un número natural; • Explicitar y usar los criterios de divisibilidad; • Elaborar estrategias personales de cálculo del m.c.d y m.c.m en diversas situaciones problemáticas, realizando diferentes descomposiciones de un número en factores. **NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS** • Elaborar estrategias personales de interpretación y producción de números racionales en sus diferentes significados (como parte de un todo, como reparto, como medida, como razón, etc) • Establecer equivalencias entre números racionales en sus diferentes representaciones (fraccionaria, decimal y porcentaje) en contextos con diversos significados. • Resolver situaciones de comparación de números racionales expresados en diferentes escrituras numéricas: naturales entre sí; fracciones entre sí; fracción y natural; decimales entre sí; decimal y natural; decimal	uso del paréntesis. • Resolver problemas de cálculo con potencias y raíz de números enteros con exponente positivo. **NÚMEROS RACIONALES** • Elaborar estrategias de interpretación y producción de números racionales en sus diferentes significados (como parte de un todo, como reparto, como medida, como razón, como cociente indicado, etc.) • Usar las diferentes **representaciones de un número racional** (fraccionaria, decimal o porcentaje) acorde al contexto y la situación a resolver. • Argumentar acerca del uso de **la notación científica** al expresar, comparar y/o calcular números. • Usar **la potenciación** (con exponente entero) **y la radicación en Q**. y analizar las propiedades de las mismas. • Analizar diferencias y similitudes entre las propiedades de los números enteros (Z) y los racionales (Q) (orden, discretud y densidad). • Resolver problemas de representación, orden o cálculo con números racionales, utilizando la recta numérica. • Utilizar y explicitar las jerarquías y	aproximado de un número irracional por truncamiento o por redondeo. • Representar **números irracionales** en la recta numérica (con escuadra y compás o en forma aproximada). • Explorar y enunciar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos (discretud, densidad y aproximación a la idea de completitud), estableciendo las relaciones de inclusión entre ellos. • Usar las **seis operaciones con números racionales** argumentando el uso de las propiedades correspondientes al resolver problemas de cálculo. • Explorar situaciones de cálculo con radicales.

y fracción; natural, decimal y fracción; • Elaborar estrategias personales de cálculo de sumas y restas con números racionales, en contextos con diferentes significados; • Resolver situaciones de multiplicación y división de fracciones en contextos de área , proporcionalidad y medida; • Elaborar estrategias personales de cálculo de multiplicación y división de números decimales, en contextos con diferentes significados; • Resolver situaciones problemáticas que involucren más de una operación con números racionales en contextos con diferentes significados; seleccionando el tipo de cálculo (mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin calculadora) y evaluando la razonabilidad del resultado. • Explorar situaciones problemáticas que justifiquen el uso de ejercicios combinados sencillos, teniendo en cuenta la jerarquía y las propiedades de las operaciones y las reglas de uso del paréntesis.	propiedades de las operaciones y las reglas de uso de los paréntesis en la resolución de problemas de cálculo. • Producir cálculos que combinen varias operaciones con números racionales en relación con un problema y producir un problema en relación con varios cálculos combinados con racionales. • Explicitar y argumentar la selección del tipo de cálculo (mental y escrito, exacto y aproximado, con y sin calculadora) y evaluar la razonabilidad del resultado en la resolución de situaciones problemáticas con números racionales. • Argumentar y validar los procedimientos utilizados al resolver situaciones numéricas diversas.	

Se usarán situaciones problemáticas de más de una operación con **números naturales** permitiendo que los alumnos las resuelvan con procedimientos personales. Es buena oportunidad para incluir algoritmos alternativos, de tal forma que los alumnos analicen más de una manera de calcular una operación. Siempre es conveniente que analicen el procedimiento que resulta más económico de todos los producidos por el grupo clase.

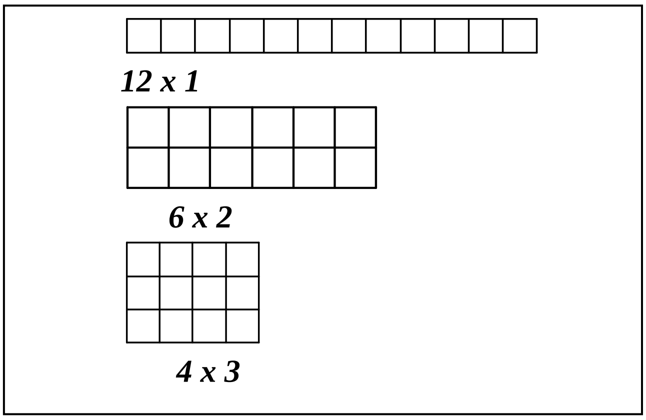
Se plantearan problemas con naturales que respondan a los distintos significados de la multiplicación: variación proporcional, arreglo rectangular, comparación y combinación. Sobre todo se reforzarán los significados de arreglos rectangulares y de combinación, ambos incluyen aspectos del cálculo de áreas y de la combinatoria respectivamente. Al mismo tiempo, se piensa en continuar afianzando las propiedades y relaciones de la multiplicación. Siempre es necesario poner al análisis de la clase los procedimientos producidos por los diferentes grupos.

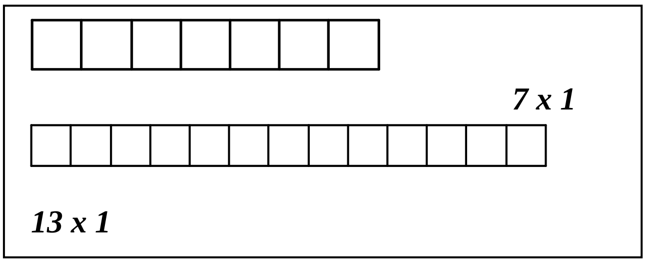
- *Propone una cuenta de dividir en la que el divisor sea 35 y el resto 7. ¿hay una sola? ¿por qué?*
- *Sabiendo que 1350 : 54 = 25, indica sin hacer la cuenta cuáles de las siguientes divisiones va a tener resto 0:*
1350 : 25 b) 1350 : 27 c) 1350: 50 d) 1350 :17
- *Romina necesita armar una clave de 5 dígitos, todos distintos entre sí, para usar en el cajero automático. Si ya seleccionó los números 1, 3, 6, 8, y 9 ¿cuántas claves distintas puede armar?*

Los problemas que involucran estas relaciones pertenecen al campo multiplicativo y se articulan con el trabajo propuesto para profundizar las propiedades y relaciones de la multiplicación y la división con números naturales. Se plantearán situaciones que permitan revisar la reversibilidad de los conceptos de múltiplo y divisor de un número. Se establecerán las nociones de números compuestos, primos y se explorarán diferentes formas de encontrar números primos.

- *Busca entre los números menores que 100 los que tienen una cantidad impar de divisores. ¿qué características tienen esos números?*
- *¿Cuántos múltiplos de 3 y 5 menores que 60 existen? ¿Cuántos entre 600 y 1200? Plantea dos formas diferentes de encontrarlos.*

La representación gráfica de arreglos rectangulares para expresar las diferentes descomposiciones de un número como producto de otros dos, permite visualizar los números primos y los compuestos.





Se seleccionarán situaciones problemáticas que impliquen el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo entre dos números. Se incentivará la búsqueda de procedimientos personales para resolverlos. En los casos del m.c.d, pueden determinar todos los divisores de cada número y seleccionar el común mayor. También se estudiarán los números coprimos y su relación con el m.c.d y el m.c.m.

- *¿Podrías determinar si el resultado del siguiente producto resulta un número divisible por 2, por 5 y por 10? 24 x 15 x 7. Explica tu respuesta.*
- *¿Si se restan dos números que son múltiplos de 3, el resultado es múltiplo de 3? Verifícalo.*
- *Si se multiplica un número múltiplo de 7 por 5, ¿el resultado sigue siendo múltiplo de 7? ¿por qué?*
- *En la siguiente cuenta, será verdad que el resto es 5? ¿Por qué?*

  (45876 x 7) + 5 | 7
- *¿Es cierto que si obtenemos el m.c.m y el m.c.d de dos números, el número que se obtenga como m.c.d. va a ser divisor del que obtenga como m.c.m? Justifiquen la respuesta.*

El tratamiento con **números racionales** está presente a lo largo de todo el ciclo básico. Se propende a un abordaje gradual, variando el grado de complejidad en el transcurso de los 3 años. Cada institución podrá realizar esta graduación acorde a su realidad específica. En el primer año, se pretende que se retomen y se profundicen las propuestas presentadas en 5° y 6° relacionadas con los diferentes significados y representaciones de los números fraccionarios y decimales y porcentajes. Es muy importante que el alumno llegue a interpretar el significado de los símbolos que utiliza para describir las situaciones que llevan implícita la noción de fracción.

Se retomarán y profundizarán los diversos significados de los números fraccionarios:

- Como parte de un todo y como medida (en contextos discretos y continuos)
- Como reparto
- Como razón (proporcionalidad, porcentaje, probabilidad)
- Como cociente indicado.

- *Para repartir 4 barras de chocolate entre 6 amigos, se fraccionó cada una en "barritas" más pequeñas y cada amigo recibió 8 "barritas". ¿En cuántas partes debió dividirse cada barra para que ello ocurriera? ¿Y si cada amigo hubiera recibido 2 "barritas"?*

- *Si la cinta A entra 5 veces en un entero y la tira B entra 3 veces ¿Qué parte de la tira A es la tira B?*

La idea es proponer situaciones puedan también interpretar a la fracción como el cociente entre dos números naturales, que 3: 5 es equivalente a 3/5. Es interesante propiciar el análisis de que es posible siempre encontrar el producto de dos fracciones que de cómo resultado 1; a diferencia de los números naturales.

Resulta valioso dotar de significado a los números decimales que vayan apareciendo. Por ejemplo, el 0,01 puede surgir en el contexto de la medida para expresar la centésima parte del metro o un centavo, como el resultado de repartir uno entre cien, como una extensión del sistema de numeración decimal, etc.; deben reconocer que el número 0,01 es el mismo en todas las situaciones presentadas. El contexto del dinero es un recurso propicio para plantear situaciones con números decimales.

Un juego dispone fichas con valores de 1; 0,1; 0,01 y 0,001. Hay 40 de cada una.

- *Indica con que fichas es posible armar los números 3,04 y 7,123. Propone dos soluciones para cada uno.*
- *Si te pidieran que utilices el mínimo número de fichas para componerlos. ¿Cuáles usarías en cada caso?*
- *Qué números armás si usás las siguientes fichas: 4 de 0,01 + 5 de 0,1 + 3 de 1 + 9 de 0,00*

También es posible plantear un juego similar pero donde las fichas tengan un valor de 1; —; —; —; es conveniente para revisar las relaciones entre expresiones decimales y fracciones decimales.

Se apunta a que reconozcan que las expresiones ¾ y 0,75 o 1+1/2, 1 ½, 3/2, 1,5, 1,50 corresponden a distintas representaciones de una misma cantidad. Es importante propiciar las discusiones acerca de las características de estas representaciones y la transformación de una en otra.

- *En un aula 3 de cada 4 alumnos tienen calificaciones superiores a 6. En otra 4 de cada 6 son los que tienen notas superiores a 6. ¿En cuál de las dos aulas hay más alumnos con notas superiores a 6?*

La comparación de las fracciones – y – permite resolver el problema. Este tipo de problemas es propicio para asociar las fracciones, los decimales y el porcentaje; – = 0,75 = 75% y – = 0, 66… = 66, 66% aproximadamente.

¿A qué porcentajes corresponden las siguientes fracciones: 2/3; 4/5; 3/10; 7/20?
¿A qué fracciones corresponden los siguientes porcentajes: 4%; 24%¸70; 12,5%?

Otro análisis que se debe poner a consideración es la diferencia entre expresiones con un número de decimales finito y las expresiones con un número de decimales infinito.
Es decir, para encontrar la expresión decimal de 3/8 podrán hacer 3:8 y obtener 0,375; luego podrán comprobar que 0,375 x 8 = 3. En el caso de 5/3 se podría argumentar que si fuese igual a 1,66 entonces 1,66 x 3 debería ser igual a 5, pero esto no ocurre. Salvo que efectuemos todo el proceso con una calculadora. Esta situación pone a discusión valores exactos y aproximados de las expresiones decimales y del tipo de aproximaciones que realiza una calculadora.
A partir de un trabajo centrado en la resolución de los problemas, es posible encarar una reflexión específica sobre la noción de equivalencia de fracciones.
Es adecuado retomar ideas establecidas, por ejemplo que: "si el numerador y el denominador de una fracción resultan de multiplicar numerador y denominador de otra por un mismo número natural, ambas fracciones son equivalentes y representan el mismo número racional", esta condición sirve pero no es la única. En este caso es oportuno mostrar por ejemplo que 4/8 y 5/10 son fracciones equivalentes y no verifican dicha condición. Es conveniente reelaborar entre todos alguna condición que sea más abarcativa, por ejemplo:
¨dos fracciones son equivalentes si representan la misma expresión decimal ¨o ¨dos fracciones son equivalentes si al simplificarlas, coinciden¨
Se busca también que establezcan criterios de comparación:

- ¨Si dos fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador¨
- ¨Si dos fracciones tienen el mismo numerador es mayor la que tiene el denominador menor¨

Encontrar una fracción equivalente a 5/4:

a) con denominador par;
b) con numerador impar;
c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Para otras comparaciones es conveniente transformar una (o ambas fracciones) en otras equivalentes para poder aplicar alguno de los dos criterios anteriores. Es útil que los alumnos exploren y expliciten diferentes formas de comparar fracciones. Se evitará iniciarlos en algún algoritmo para comparar fracciones, por ejemplo el producto cruzado, este procedimiento puede analizarse posteriormente como uno más de los tantos que produce la clase. La idea es que incorporen la necesidad de establecer escrituras equivalentes para realizar comparaciones. Se busca también que establezcan criterios de comparación:

- *La siguiente tabla muestra la proporción de azúcar y agua que hay en distintas soluciones:*

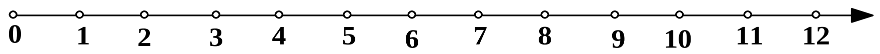
Agua (cm^3)	*100*	*70*	*80*	*210*	*70*
Azúcar cucharas	*3*	*2*	*3*	*9*	*3*

Ordenarlas de la más dulce a la menos dulce.

Es conveniente el uso de la recta como medio para comparar, representar y operar con racionales.

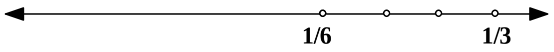
- *Tenemos los datos de los saltos de cinco canguros, quienes avanzan del 0 hacia la derecha en una recta como la siguiente. Cada canguro da saltos de la misma longitud:*

Canguro A	*Canguro B*	*Canguro C*	*Canguro D*	*Canguro E*
llega al 5 en 3 pasos	*llega al 5 en 9 pasos*	*llega al 14 en 9 pasos*	*llega al 10 en 6 pasos*	*llega al 23 en 11 pasos*

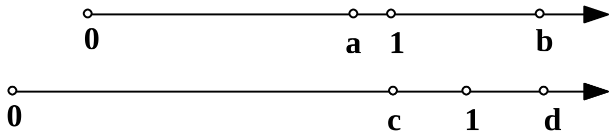


a) *Ordena por tamaño los pasos de los 5 canguros .Explica cómo hiciste para compararlos.*
b) *¿Cuánto miden los pasos de cada canguro? Ordena de menor a mayor los números que obtuviste.*

- *En las siguientes rectas numéricas, ubicar el 0 y el 1.*



- *Ordenar de menor a mayor las fracciones a, b c y d que se presentan en las dos siguientes rectas.*



Para revisar la operatoria con números racionales, tal cómo se propone en la operatoria con números naturales, se fortalecerá el establecimiento de procedimientos personales para resolver las situaciones planteadas, evitando recurrir primero a los algoritmos convencionales.

- *Propongan tres sumas diferentes cuyos resultados sea 4/3.*
- *Si tenemos 1/4 kilo de azúcar y 2/5 kilo en otro y necesitamos 750 grs. para un postre, ¿nos alcanza? Propone dos maneras diferentes para determinar cuánto sobra o cuánto falta.*

Tratar la multiplicación de fracciones en el contexto de áreas de rectángulos y de proporcionalidad permite el establecimiento de sentidos para el uso del algoritmo convencional. Se tratarán situaciones donde se pongan en juego la multiplicación de una fracción por un número natural y la multiplicación de dos fracciones. Se pretende poner en discusión las alteraciones que conllevan las operaciones al pasar de los naturales a los racionales. Se espera que los alumnos puedan comprender que:

- Solo la multiplicación de una fracción por un natural puede ser tratada como una suma reiterada.

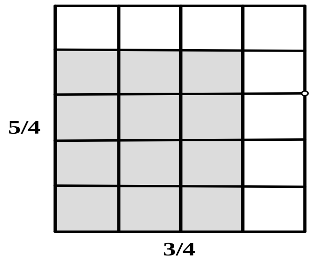
. *Si dispongo de 7 frascos de ¾ kg., ¿cuántos kg. hay en total?* En este caso pueden usar el procedimiento que conocen de la suma reiterada para encontrar el resultado. – +

– +– +– +– +– +– = — , o 5– , o 7 x –.

- No siempre el producto de dos fracciones da como resultado números mayores que sus factores.
- Con los números racionales siempre es posible encontrar respuesta a situaciones del tipo: *determinar un número que multiplicado por 5 de cómo resultado 2.* Cosa que no ocurre con los naturales.

Si multiplico dos fracciones, ya no es factible el procedimiento anterior. (recurrir al producto de medidas o proporcionalidad).

- *Tenemos un terreno de forma rectangular y queremos construir un vivero que ocupe las ¾ partes del largo y los 4/5 del ancho. Dibuja el terreno marcando la zona donde se realizará la construcción. Propone un cálculo que te permita obtener que parte del terreno representa el área del vivero.*



- *Si se quiere que el vivero siga teniendo la misma área y conservando su forma, pero que uno de sus lados sea la mitad del lado del terreno; ¿Qué parte del lado del terrenos ocupa la medida del otro lado?*
- *Si el área ocupada por el vivero es 2/5 de la del terreno, ¿Qué parte del ancho y del largo del terrenos podrían ser las medidas del ancho y el largo del vivero? ¿Hay una única solución?*

Ejemplos de situaciones división de fracciones en el contexto del producto de la medida.

- *¿Cuántas botellas de – litro se pueden llenar si se dispone de 5 litros de jugo? ¿Y si son 9/4 litros de jugo? ¿Cuántas en el caso de ser 18/4 litros de jugo?*
- *Con un botellón de 13 litros de leche podemos llenar más vasos de 1/4 o más vasos de 2/7?*
- *25: 1/5, siendo 1/5 bastante menor que la unidad el resultado va a dar bastante mayor que ella, ya que equivale a dividir 5 unidades en quintos, y siendo que en cada unidad existen 5 quintos, se obtiene 25 veces 1/5.*

En el caso de los **decimales** valen las mismas reglas que se establecen con las fracciones en cuanto a la ruptura que sufren estas operaciones al pasar de los naturales a los racionales. Se pueden plantear situaciones que pongan estas ideas en discusión.

- *¿Es verdad que si multiplicamos 2,56 x 100 nos da un número mayor que 100? ¿y si multiplicamos 0,56 x 100 ocurre lo mismo?*

Es conveniente retomar la multiplicación y división de las expresiones decimales por la unidad seguida de ceros; este saber memorizado, les servirá de soporte para proponer estrategias personales de multiplicación y división. Es importante que refuercen la idea que en el algoritmo convencional de la división, el divisor siempre debe ser un número entero. Esto los llevará a equiparar dividendo y divisor, buscando escrituras equivalentes.

Por ej: 2,44 : 1,5 es equivalente a 24,4 : 15 o 244 : 150.

- *¿Sera cierto que multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir por 10?*
- *Encuentren una manera rápida de multiplicar cualquier número por 0,01 y 0,001.*

¿Si en lugar de multiplicar a un número por 0,1; dividimos por 0,1 que ocurre?

Se pretende que refuercen el establecimiento de estas regularidades las memoricen para que les sirvan de apoyo en otros cálculos más complejos.
Para usar la calculadora:

- *Indica cuánto hay que agregar o quitar para pasar del: a) 2,456 al 2,406; b) 4,763 al 1,43*
- *Explora con la calculadora hasta encontrar el número que falta en cada caso:*

a) – x .... = – *b) ....: 0,625 = –*

Para resolver con varias operaciones:

- *Alcanza una torta para ser cortada en:*

a) *6 porciones de 0,30 del total cada una?*
b) *4 porciones de 0,25 del total cada una?*
c) *8 porciones de 0,2 del total cada una?*

- Macarena decía: ¨Mi edad actual representa las 3/4 partes de la de Ana cuya edad es, a su vez, las 4/5 partes de la de Inés, que tiene 5/3 partes de la de Camila, quien ayer cumplió 42 años. ¿Qué edad tiene Macarena?

Se pretende el planteo de situaciones de variado nivel de dificultad que permitan reforzar los diferentes tipos de cálculos, seleccionando el más adecuado acorde a la situación y al sentido que le vayan otorgando a los mismos. También se fortalecerá la conveniencia en el uso de expresiones fraccionarias o decimales según lo requiera el desarrollo del problema.
Para resolver sin cuentas:

- *Indica cuál de las siguientes expresiones expresa la cuarta parte de 5:*

a) *–+5* *b) 5 : –* *c) 0,25 x 5* *d) –x 5*

- *Indica sin realizar cuentas cuáles de los siguientes resultados es mayor que 1:*

a) *– :2 ;* *b) 7 x –* *c) – x 3*

- *Sabiendo que 2,7 x 4,8 es 12,96, indica sin realizar cuentas cuál es el resultado de 27 x 4,8 y el de 2,7 x 0,48*

El establecimiento de la noción de densidad es compleja. La idea es presentar variadas situaciones que les permitan explorarla y profundizarla a partir del 2° año. La recta numérica se constituye en un soporte muy importante pensar ideas respecto al orden y la densidad. Inicialmente se presentarán situaciones para elaborar recursos que les permitan encontrar un número que esté justo a la mitad de otros dos números.

- *Indica qué número esta justo en el medio entre :*

a) *250 y 350;* *b) 25 y 3;* *c) 2,5 y 3,5;* *d) 1/2 y 1/4;* *e) 5/3 y 17/9*

Es esencial también que busquen fracciones entre dos enteros. Se propondrán otros intervalos, además del (0,1). Esta idea es más compleja para los alumnos, pero es fructífera abordarla.

- *¿Es posible encontrar una fracción entre – y –? ¿Hay más de una? Propone otras.*
- *¿Cuántas fracciones hay entre 7 y 8? ¿Cuántas fracciones con denominador 3 hay entre 7 y 8? ¿Y con denominador 8? ¿Y con denominador 17?*
- *Encontrar una fracción mayor que 3/8 y menor que 13/20 con denominador 5, otra con numerador 9, y otra con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.*
- *Escriban 4 números entre 3,5 y 3,6. Entre 10, 27 y 10,3. ¿Hay más? Propone otros.*
- *Encontrar si es posible un número decimal entre — y —. Uno entre — y —*

Se propondrán situaciones cuya representación exija el uso de paréntesis. Se analizarán también las variaciones que determinan las diferentes ubicaciones de los paréntesis. Al igual que con los naturales, se evitarán ejercicios largos y complejos.

- Ema compró 3/4 m de cinta a $3,2 el metro. Usó la mitad y el resto lo vendió a $ 4 el metr. Si en su casa tenía 5$, ¿cuánto dinero le quedó? Determina si son correctos los siguientes cálculos para resolver la situación planteada. Justifica.
a) 5 – 3,2 .3/4 + 0,75.1/2. 4   b) (5 - 3,2.) 0,75 + 3/4. 1/2. 4   c) 5 +(¾ :2).4- 0,75.3,2

Las situaciones donde están presentes o se utilizan los **números enteros**, como por ejemplo temperaturas, deudas y ganancias, nivel del mar, etc.; son un punto de partida para cualquier introducción a este tema; pero la constitución de este conjunto numérico necesita de algo más que situaciones concretas. Las operaciones con números enteros no tienen un significado concreto e intuitivo en cada contexto. Multiplicar temperaturas no tiene sentido, restar deudas tampoco tiene un soporte intuitivo fácil, y si la resta ocasiona problemas, con la multiplicación las cosas se complican aún más. Se trata de plantear situaciones problemáticas dentro del conocimiento matemático, que dejen patente la insuficiencia del conjunto de los números naturales y den pie a la constitución del conjunto de los números enteros.
Proponemos un trabajo a partir del 2° año, dependiendo del campo conceptual en que se encuentra el problema de partida y los conceptos que se utilizan; una aproximación a los enteros a través de tres accesos: uno aritmético, uno geométrico y uno algebraico.

Los números negativos surgen en la resolución de ecuaciones y no por necesidades geométricas, pero al iniciarse el uso de sistemas de coordenadas independientes de las figuras, los números negativos se hacen indispensables para describir en su totalidad líneas y curvas.

No se trata de de esclarecer su existencia, son vías constructivas y no existenciales que tienen su base en el principio de permanencia de las leyes de la aritmética. El principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética se refiere a la ampliación de los conjuntos numéricos y sus operaciones de tal forma, que se conserven algunas leyes que se consideran fundamentales (asociativa, conmutativa, etc.).

Dentro de lo aritmético lo que prevalece es la aparición de los números negativos por la necesidad de ampliar la operación de restar en N. los números negativos por tanto, serán los resultados de operaciones de restar.

Dentro de lo algebraico, se introducen los números negativos como soluciones de ecuaciones imposibles de resolver con números naturales.

Las ecuaciones $x + a = 0$ con $a \varepsilon N$, no tiene solución en N, por lo que es necesario definir ciertos números que sean soluciones de estas ecuaciones, a tales números se les denomina números negativos. Se suele notar por (-1) la solución de $x + 1 = 0$. Dicho en otros términos, (-1) es el número que sumado a 1 da cero, denominándose (–a) al número que sumado a ¨a¨ da cero, $(-a) + a = 0$.

En el campo de la geometría, abordaremos los números enteros como un instrumento necesario para establecer una escala numérica sobre una recta. En este campo los números enteros se identifican con objetos geométricos. Es necesario designar puntos en una recta, un origen (arbitrario) y una unidad de medida (escala) para representar los números enteros. Los números enteros son símbolos que designan puntos de una recta, de esta manera los negativos se pueden introducir en un marco geométrico a través de la recta numérica como soporte intuitivo. También se puede usar este contexto para definir las operaciones a través de desplazamientos sobre la recta.

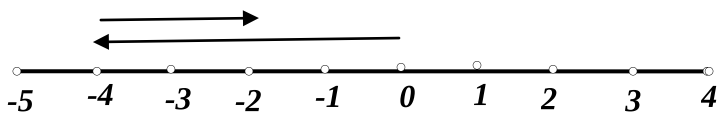
Las situaciones basadas en contextos reales que se suelen utilizar para las operaciones, por ejemplo, 5 – (-3) ó (-4) – (-2) suelen ser rebuscadas y no situaciones usuales, es por eso que lo más conveniente para estas operaciones sea el uso de desplazamiento a la izquierda o a la derecha sobre la recta numérica.

Multiplicar un número positivo, por otro negativo, es más intuitivo y fácil de comprender, ya que existen situaciones concretas donde tiene un significado y se puede mantener la definición de multiplicación en N como suma reiterada, así podemos interpretar: 4. (-2) = (-2) + (-2) + (-2)+ (-2) y como se supone que verifica la propiedad conmutativa, se verifica también para (-2). 4.

Las operaciones de multiplicar, donde los factores son dos números negativos, se ajustan mejor para el uso también de la recta numérica.

Veamos un ejemplo sencillo:

- *Para resolver -4-(-2) se usó una recta numérica, como se muestra en la figura. ¿Podés explicar cómo se usó la recta para encontrar el resultado?*



Se pueden plantear situaciones aritméticas sencillas que permitan justificar la regla de los signos. Por ejemplo:

- *Analicen el siguiente procedimiento, expliciten sus pasos y compruébenlo con otros ejemplos: para el producto de (2) x (-5)*

(2) x 0 = 0 ya que cualquier número multiplicado por 0 da 0
(2) x [5 +(- 5)] = 0 ya que la suma de opuestos da cero *3 + (-3) = 0*
(2) x (5) + (-5) x (-3) = 0 con la propiedad distributiva de la multiplicación
(10) + (2) x (-5) = 0
Acá se concluye que para satisfacer la igualdad el producto de *(2) x (-5)* debe ser igual *–10*

- Se puede usar el mismo criterio para el producto de (-4) x (-3)
(-4) x 0 = 0 ya que ………………………………
(-4) x [3 +(- 3)] = 0 ya que ……………………………
(-4) x (3) + (-4) x (-3) = 0 aplicando ……………………
(- 12) + (-4) x (-3) = 0 …………………………………..
Acá se concluye que para satisfacer la igualdad el producto de *(-4) x (-3)* debe ser igual *+ 12*

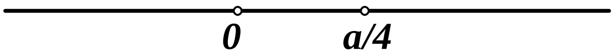
Posteriormente en este mismo ciclo, se pueden realizar este tipo de justificaciones para casos más generales (usando letras), dando una entrada al proceso demostrativo, (ver ejemplos en el eje álgebra).

También en 2° y 3°, se **ampliará el conjunto de los racionales**, con la incorporación de los racionales negativos. Al respecto se harán extensivos las relaciones, propiedades, procedimientos y algoritmos ya establecidos para los racionales positivos y para los enteros, ajustándolos al trabajo específico con racionales.

- *Éstas fracciones están ordenadas de menor a mayor:*
— < -– < — < — <—

Ubica entre ellas - – ; – y — . Explica a tus compañeros los criterios que utilizaste para ordenar las fracciones dadas.

- *En la siguiente recta indica dónde ubicarías* ***a, -a,*** *y* ***-3/2a***



- *Completa los siguientes cálculos:*

a) *-2 x .... = -1* *b) – x ....= -1* *c) - 0,75 x ......= 1*

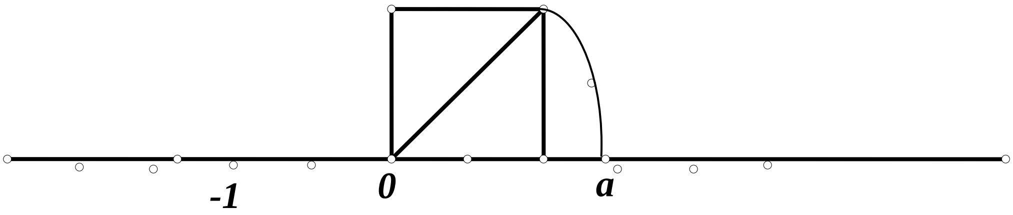
En el tercer año, se amplían los conjuntos numéricos con la introducción del **número irracional**. No se pretende profundizar, ni tampoco centrarnos en el trabajo con radicales, simplemente incluir la noción de irracional y aproximarnos al tratamiento de los números Reales.

Una buena manera de introducirlos puede ser, siguiendo su aparición en la historia, tratando de encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde la medida de los catetos es 1; dando lugar a la aparición del número ‾.

- *Construí un cuadrado cuya área sea de 4 . Determina los puntos medios del cuadrado que construiste y arma otro cuadrado usando esos puntos como vértices. Calcula la medida del lado del cuadrado interior.*

- *Intenta construir un rectángulo cuyos lados midan ‾ cm y 1 cm. Explica el procedimiento que usaste. Calcula la medida de la diagonal del rectángulo que construiste.*

- *La figura que ves sobre la recta numérica es un cuadrado. Indica que número representa la letra ¨a¨. Explica como lo pensaste. Ubica sobre la misma recta los números* ***– a ; a -1*** *y* ***2.a***


-1
0
a

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

El **pasaje de la aritmética al álgebra** supone rupturas esenciales con respecto a las prácticas que los alumnos vienen desarrollando. Es recomendable seleccionar situaciones que les faciliten a los alumnos la entrada al álgebra y el acceso a procesos de pensamiento más abstractos. Pensamos un trabajo algebraico donde, al menos en sus comienzos, las propuestas tengan significado evitando apresurar el tratamiento simbólico y algorítmico que estamos acostumbrados a desarrollar en las aulas. Podemos caracterizar en el proceso algebraico al menos dos fases bien diferenciadas: por un lado poder ¨ver¨ la generalidad de la situación y por el otro, poder expresarla en lenguaje coloquial y/o simbólico. Es un proceso complejo y no se espera que los alumnos logren apropiarse rápidamente de esta particular forma de razonar y pensar.

1º año	2º año	3º año
PROPORCIONALIDAD • Resolver problemas de proporcionalidad directa; utilizando estrategias personales basadas en las propiedades y en la constante de proporcionalidad (natural, fraccionaria o decimal) • Comparar diferentes situaciones de proporcionalidad a través del análisis de las constantes y de los gráficos cartesianos respectivos. **INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA** • Escribir, continuar y generalizar patrones aritméticos y geométricos a partir de diversas situaciones. • Explorar la noción de variable y de dependencia entre variables en expresiones algebraicas sencillas. • Profundizar en el estudio de los números naturales a partir del uso de letras.	**PROPORCIONALIDAD** • Resolver problemas de proporcionalidad inversa, analizando la constante de proporcionalidad. **FUNCIÓN LINEAL** • Explicitar y analizar propiedades de las funciones de proporcionalidad directa (variación uniforme, origen en el cero, etc). • Explorar situaciones que modelicen variaciones lineales en sus diferentes representaciones. • Establecer y explicitar las relaciones entre las características de la gráfica de una función y su fórmula. **ÁLGEBRA** • Producir y comparar fórmulas que representen regularidades numéricas en N. • Interpretar fórmulas y discutir ideas sobre múltiplos y divisores. • Elaborar fórmulas sobre múltiplos y divisores, estableciendo conjeturas y validándolas. • Producir y comparar fórmulas representando regularidades geométricas. • Modelizar diferentes situaciones matemáticas o extra matemáticas a través del lenguaje simbólico. • Usar expresiones algebraicas para explicar propiedades y relaciones numéricas y geométricas	**FUNCIONES** • Comparar diferentes situaciones de proporcionalidad a través del análisis de las constantes y de los gráficos cartesianos respectivos. • Interpretar gráficas y fórmulas que modelicen variaciones lineales y no lineales (incluyendo la función cuadrática) acorde a la situación; • Modelizar y analizar variaciones lineales expresadas mediante tablas, gráficos y/o fórmulas, interpretando sus parámetros (la pendiente como cociente de incrementos, las intersecciones con los ejes, etc); • Determinar la ecuación de una recta a partir de diferentes datos; • Vincular las relaciones entre rectas con las variaciones de sus parámetros; • Analizar las relaciones entre diversas representaciones de una función. **ÁLGEBRA** • Usar expresiones algebraicas para analizar, justificar y/o demostrar propiedades y relaciones numéricas y geométricas • Transformar expresiones algebraicas usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado; • Argumentar sobre la equivalencia o no de ecuaciones de primer grado con una variable; • Modelizar diferentes situaciones matemáticas o extra matemáticas a través del lenguaje simbólico que

	• Usar ecuaciones lineales con una variable como expresión sobre un conjunto de números y analizar su conjunto solución. (solución única, infinitas y sin solución). • Transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes usando propiedades. • Interpretar fórmulas o expresiones algebraicas equivalentes.	representen un sistema de ecuaciones o de inecuaciones. • Resolver problemas de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. • Usar ecuaciones con una o dos variables y analizar el conjunto solución; • Vincular las relaciones entre dos rectas con el conjunto solución de su correspondiente sistema de ecuaciones.

Se plantearán situaciones que involucren a los alumnos en la reflexión y el dominio de las propiedades que sustentan la resolución de la proporcionalidad. Se les proporcionarán situaciones que les permitan reconocer cuáles responden a relaciones proporcionales y cuáles no.

Se evitará inicialmente el planteo de la ¨regla de tres¨. Ya vimos que la proporcionalidad brinda significados a las operaciones con naturales y racionales, por tanto se fortalecerán los procedimientos donde se pongan en juego las propiedades de las operaciones con dichos números, sobre todo las específicas del campo multiplicativo: al doble el doble, a la mitad la mitad, etc. Se tiende a que los alumnos elaboren y comuniquen estas propiedades y que las pongan en juego en sus procedimientos de resolución: Cuadernos Para el Aula Matemática 6. (2007).

- ¨En una relación de proporcionalidad directa si se multiplica una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente, en la otra magnitud queda multiplicada por el mismo número¨.

- ¨En una relación de proporcionalidad directa se cumple que a la suma de dos cantidades de una magnitud le corresponde la suma de las cantidades correspondientes de la otra magnitud.¨

En el siguiente ejemplo proponemos el uso de las propiedades mencionadas.

- *Se establece una relación entre las personas que van a la función de un cine y lo recaudado en dicha función.*

Cantidad de personas	*30*	*90*	*45*	*75*
Recaudación $	*360*			

Asimismo se pretende que recurran al cálculo del valor de la unidad de una de las magnitudes, lo que posibilita el planteo de ideas respecto a la constante:

- ¨En una relación de proporcionalidad directa, se cumple que el cociente entre los pares de cantidades correspondientes a ambas cantidades es constante. ¨

Una pregunta podría dar lugar a la aparición de la constante. En el caso del ejemplo: *¿Cuál sería el valor de la entrada al cine?*

También se plantearán problemas que reflejen los dos tipos de relaciones de proporcionalidad:

- ¨una relación escalar, que vincula cantidades de una misma magnitud¨; (90/ 30 *en el caso del ejemplo)*
- ¨una relación funcional que vincula cantidades de magnitudes diferentes¨ (*recaudación en $ respecto a la cantidad de personas 360/30)*

Veamos un ejemplo que pone en juego el uso de diferentes escrituras numéricas:

. En un almacén se necesita completar una lista de precios ($) del jamón cocido en función de la cantidad expresada en relación con su peso.

Peso	*1/2 kg*	*3/4 kg*	*2kg*	*3kg*	*100grs*	*150grs*
Precios ($)	*9,60*					

La pregunta acerca del valor de 1kg, permite determinar el valor de la constante y reflexionar respecto a su uso para completar la tabla, ayuda incorporar otras estrategias de solución; esta es la más cercana a la ¨regla de tres¨.

Es importante también presentar situaciones donde se evidencien las relaciones proporcionales en la geometría: se fortalecerá el tratamiento de escalas. Es conveniente analizar la relación del valor de la constante, si es menor que 1 implica una reducción, si es mayor que 1 una ampliación. Aporta otro significado también al concepto de fracción, resulta en este caso un valor comparativo entre dos cantidades.

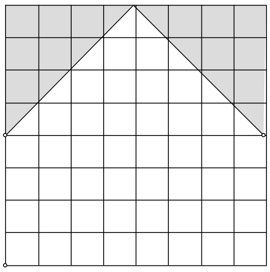
.Corta tiras de papel con las siguientes medidas: doce de 3 cm; doce de 5 cm y doce de 7 cm. Arma con ellas dos juegos de las siguientes figuras. Cada uno de diferente tamaño.

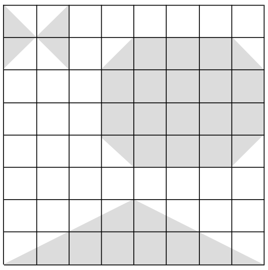
- *Dos triángulos equiláteros.*
- *Dos cuadrados.*
- *Dos pentágonos regulares.*

Calcula la razón de ampliación o reducción entre los triángulos, los cuadrados y los pentágonos, entre sí.

Otro concepto que debe tratarse, como ya lo expusimos también, en el eje numérico, es el de porcentaje. Aparece la fracción como en el caso de las escalas como valor comparativo o constante de proporcionalidad. En ambos tipos de situaciones reaparece la relación parte - todo que está presente en el porcentaje.

. ¿Qué porcentaje de la figura está pintada en cada caso?





O problemas en diversos contextos. En ambos tipos de situaciones reaparece la relación parte - todo que está presente en el porcentaje.

. *Un relojero tiene una ganancia del 30% sobre el precio de costo de los productos que vende.*

a) Si un reloj le costó $240 ¿A cuánto deberá venderlo?
b) Si vendió una joya a $1200 ¿cuánto la pagó de costo?

La proporcionalidad inversa, al igual que la directa permite establecer los dos tipos de relaciones.

- Las escalares que involucran cantidades de una misma magnitud;

- Las funcionales que involucran cantidades de magnitudes diferentes; éstas ponen en evidencia la razón o constante de proporcionalidad.

Surge acá la necesidad de presentar situaciones donde los alumnos elaboren ideas, las expliciten y validen, respecto a estas relaciones y a las propiedades de la proporcionalidad inversa que sustenta el uso de estrategias personales de resolución:

- ¨Si en una relación de proporcionalidad inversa se multiplica por un número una cantidad de una magnitud, la cantidad correspondiente de la otra magnitud queda dividida por el mismo número, y viceversa.¨

- ¨En una relación de proporcionalidad inversa, el producto de los pares de cantidades correspondientes es constante.¨

. *Se dispone de 20 litros de jugo para envasar en botellas. Completar la siguiente tabla indicando en cada caso el procedimiento usado.*

: 8

Cantidad de botellas	*80*	*10*		
Capacidad de cada botella (l)	*1/4*		*0,2*	*3/4*

X8

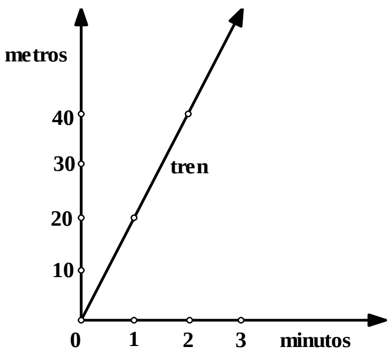
- *Con una tela de 0,60 m de ancho y 1,20 de largo ¿Cuántas servilletas cuadradas de 0,30 m de lado pueden hacerse? ¿Y de 45cm de lado; y de 15 cm de lado?*

Se pretende la interpretación y producción de gráficas en los ejes cartesianos que representen relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Se prestará especial atención al tipo de situaciones que se propongan inicialmente, donde el uso de las escalas sobre los ejes correspondan a campos numéricos sencillos. Posteriormente se podrán complejizar. También se abordará la equivalencia entre las distintas representaciones, evidenciando que pueden a partir de la gráfica representar la tabla, etc.

Asimismo se analizarán las magnitudes implicadas y su incidencia en el tipo de gráfico que determinan, aunque todas correspondan a un mismo tipo de proporcionalidad. Por ejemplo, si las magnitudes son cantidad de niños y cantidad de globos que reciben en un cumpleaños, es interesante que reflexionen si la gráfica que representa esta situación es una recta o sólo los puntos alineados.

Es útil promover la exploración de la variabilidad de una magnitud, en función de la constante y de la otra magnitud. El uso de software es apropiado para este tipo de exploraciones.

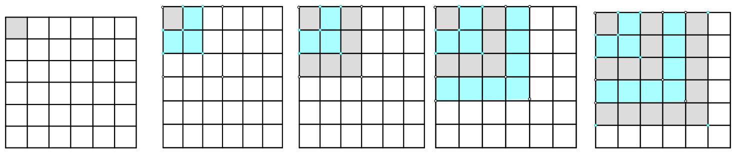
. *La siguiente gráfica muestra la relación entre la distancia recorrida y el tiempo de marcha para un tren de juguete que funciona a pila.*



a) Representa en una tabla los valores correspondientes a la gráfica.
b) En la siguiente expresión ¨ d = 20. T ¨ varía valores correspondientes a los minutos (T). Prueba con T = 1 minuto, con T = 2 minutos, con T = 3 minutos y observa en cada caso si los valores que obtienes de ¨d¨ verifican los valores de la tabla.
c) Usando esa expresión, amplia la tabla para los valores de T = 1/2 minuto; T = 5 minutos y T = 1,5 minutos.
d) Analiza que significa el 20 en la expresión ¨d = 20 . T ¨

En cuanto al tratamiento **algebraico**, se procurará proporcionarles secuencias de figuras, objetos o números que siguen un cierto orden o regularidad con el fin de que los alumnos logren identificar el modelo o patrón que sigue la secuencia, que la describan con sus palabras, con dibujos etc.; y que puedan anticipar qué objeto ocupará un lugar dado de la secuencia. Esto es uno de los requisitos en el proceso de generalización, la visualización de patrones y regularidades, son parte del proceso algebraico. Se abordarán situaciones en la que los alumnos deban percibir lo que es propio, lo común, lo invariante, que logren conseguir una regla, una expresión, que resuma todas las situaciones, despegándose de los casos concretos. Se pretende además que lo puedan expresar; la descripción oral admite diversos grados de precisión y nos brinda información acerca de la manera en que el alumno logra ¨ver¨ el modelo. Ya en 2° y 3° se los introducirá en la producción y el análisis de fórmulas y diversas expresiones algebraicas.

- *Continúa la serie con dos elementos más. ¿Qué representación ocuparía el lugar número 11?¿ Y el lugar 21?*

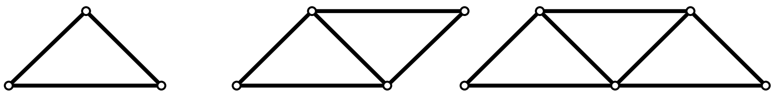


1 ***1+3*** ***1+3+5*** **………** **………**

Encuentra una expresión que permita indicar el lugar ***n*** *de la serie.*

- *Completa esta serie indicando qué figura ocupará el lugar 7. ¿Y el lugar 14? Completa la tabla para los valores indicados.*
-

N° de triángulos	*1*	*2*	*3*		*7*	*14*
N° de palitos	*3*	*5*	*7*			
N° de bolitas	*3*	*4*	*5*			



Encuentra una expresión que permita representar el número de palitos en una figura de ***n*** *triángulos.*

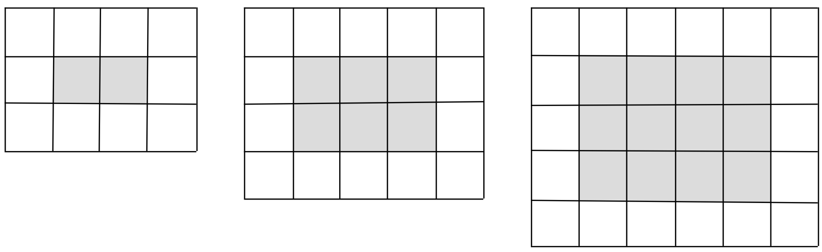
El concepto de variable es central en el aprendizaje del álgebra. Las variables asumen diferentes significados acorde al uso que tengan en situación: representando cantidades que varían o cambian, representando valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula. Se tratarán diversos aspectos del concepto, especialmente los referidos a identificar si en la expresión la variable se verifica como verdadera para un solo valor; si se verifica para un conjunto más amplio de valores, cuales son los posibles valores que puede tomar, cotejar y validar si se han considerado todos los valores posibles, etc.; asimismo este tipo de exploraciones posibilitarán que los alumnos encuentren expresiones equivalentes a una dada.

El concepto de equivalencia entre expresiones, la igualdad considerada como equivalencia, y la posibilidad de transformar una expresión en otra, son fundamentales para establecer las diferencias entre las nociones aritméticas y las algebraicas. Se ofrecerán también situaciones donde el uso de la calculadora o recursos de software sean los más aptos para realizar las exploraciones numéricas.

- *Indica qué valores naturales pueden tomar las letras **a** y **b** en las siguientes expresiones: a)* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 10$ *y b)* $\boldsymbol{a.b} = 100$

c) *Explora con la calculadora en la expresión* $\boldsymbol{a.b} = 100$ *para valores racionales positivos de las letras **a** y **b**. Indica qué diferencia esta situación de la b)*

- *Dada la siguiente serie:*



1er lugar *2do lugar* *3er lugar* ………..

Lugar	*Número de cuadraditos del borde*	*Números de cuadraditos del interior*
1ro		
2do		
3ro		
…….		
n		

*Completa la tabla e indica cuál de las siguientes expresiones representa la cantidad de cuadraditos del borde de la figura que está en el lugar **n**. Justifica tu respuesta.*

a) $4 \times (n + 1)$ *b)* $2 \times n + 4 + 2 \times n$ *c)* $4 \times (n + 2) - 4$

Como ya expresamos, el uso de letras es un recurso que dispone la matemática para expresar generalizaciones. Al respecto, a partir del 2° año se usarán expresiones algebraicas para la justificación y demostración de propiedades y relaciones diversas, tanto numéricas, como geométricas, como funcionales. Veamos algunos ejemplos:

- *Qué condiciones tienen que cumplir los números naturales* ***a*** *y* ***b*** en cada caso para que:

a) *a x b no sea par*
b) *(a + 10) sea divisible por 5.*

- *Si un rectángulo tiene lados* ***a*** *y* ***b****, ¿será cierto que su área se reduce* ***b*** *unidades si* ***a*** *se reduce una unidad?*

- *Si el área de un rombo con diagonales* ***d*** *y* ***D*** *se puede calcular como:* ——
¿ qué le ocurriría al área si sus diagonales pasaran a medir ***2.d*** *y* ***3.D****?*

- *¿Es cierto que la suma de tres números consecutivos siempre da un número par? ¿Por qué?*

- *Indicar todos los valores de* ***a para*** *que 3.****a*** *+9 sea un número negativo.*

- *Si* ***a*** *es un número negativo, encontrá, si es posible, un valor de* ***a*** *para que*
– –

- *Dos triángulos equiláteros tienen lados* ***m*** *y* ***2m*** *respectivamente:*

a) *¿Podemos afirmar que el perímetro de uno es el doble del otro?*
b) *¿Será verdad que el área de uno es el doble del otro?*

- *Los números* ***a, b*** *y* ***c*** *son naturales. La división entre* ***a*** *y* ***c*** *tiene resto cero. La división entre* ***b*** *y* ***c*** *tiene resto 41. ¿Podrá ser que la división entre (* ***a*** *x* ***b*** *) y* ***c*** *sea exacta? Justifica tú respuesta.*

- *Si sabemos que = 6 ¿cuál será el resultado de ?*

En el tercer año, se apunta también a que expliciten en un lenguaje apropiado, con mayor precisión y rigurosidad sus justificaciones. Al respecto se les proporcionarán demostraciones para que puedan interpretarlas y avanzando un poco más, pretendemos que logren producir algunas sencillas. La idea es recuperar un contenido de la escuela que se perdió en algún momento, teniendo en cuenta además que el método con el cual cuenta la matemática para justificar sus argumentos es el demostrativo. Se pueden proponer que los alumnos interpreten demostraciones deductivas, por reducción al absurdo, o buscar algún contraejemplo que invalide alguna afirmación.
Una propuesta para 3ro puede ser:

Para trabajar en grupo. La siguiente explicación justifica por qué el número ‾ *no es un número irracional.*

Léanla y traten de analizar lo que se realiza en cada paso, los siguientes ítems te ayudarán en la interpretación.

a) ¿Es lo mismo, que en lugar de usar las letras a y b se usen un par de números cualesquiera, por ejemplo 5 y 7?

b) Analicen por qué es necesaria la condición de que a y b sean números primos.

c) ¿Qué pasaría si b =1?

d) Explica por qué asegura que $\boldsymbol{a}^2$ *es par.*

e) Justifica que si $\boldsymbol{a}^2$ *es par implica que* ***a*** *también sea par.*

f) Averigua que tipo de demostración es ésta, donde se parte de suponer ¨algo¨ dado por verdadero y se llega a una contradicción.

Supongamos que ‾ *es un número racional, o sea que puede escribirse de la forma:* ‾ = –, *donde a y b son números primos y b* .

Si ‾ = – *entonces* ‾ = — *es decir que:*

2 = — *si y sólo si* *2* =

Con lo cual se deduce que *es un número par. Y si* *es par entonces a también es par.*

Si a es par, podemos escribirlo de la forma a = 2.c, siendo c un número entero. Luego = 4. .

En la expresión 2 = *Sustituimos y tenemos que 2* =4. *quedando que* 2. *con lo que se concluye que b también es un número par. Esto contradice lo supuesto, por lo que podemos inferir entonces que el número* ‾ *no puede ser racional, tal como lo habíamos supuesto.*

g) Para debatir con todo el grupo clase: si se quisiera demostrar que el número ‾ *no es racional, ¿qué parte de la demostración anterior habría que cambiar? Justificar.*

En el tratamiento con las **ecuaciones**, se tenderá a que los alumnos transformen una expresión en otra equivalente a través de las propiedades, ¨hacer lo mismo de ambos lados¨. Se evitará inicialmente el ¨pasaje de términos¨, técnica que pueden deducir y usar posteriormente al trabajo con las propiedades. Es fundamental que logren apropiarse de la idea de que una ecuación se puede sustituir por otra, con tal de que sean equivalentes. El método de deshacer o la balanza, suelen ser apropiados para el establecimiento de las nociones de equivalencia e igualdad entre expresiones.

Es importante presentar diversas situaciones problemáticas (aritméticas y geométricas), donde los alumnos tengan que representar simbólicamente dicha situación a través de una ecuación. Es necesario trabajar primero los conceptos de igualdad (como equivalencia) y de ecuaciones equivalentes. Veamos algunas situaciones que inicialmente pueden ayudar a dar sentido a estas ideas.

- *Escribe dos ecuaciones equivalentes a* $5\boldsymbol{n} + 2 = 3\boldsymbol{n}$.

- *Escribe una ecuación que tenga por solución* $\mathbf{x} = 2$.

- *Indica si las siguientes expresiones son equivalentes. Si lo son, explica los pasos qué han permitido transformar una en otra.*

a) $4x - 1 = x + 5$ *b)* $4x - 1 = x + 5$
$4x = x + 6$ $3x - 1 = 5$

- *El siguiente rectángulo tiene 18 cm de perímetro. A partir de la información presentada ¿podrás determinar la medida de cada uno de sus lados? Justifica tú respuesta.*

1/2 x

3x +1

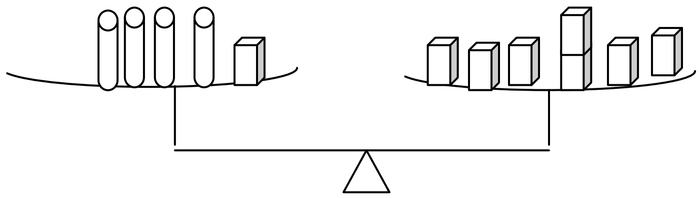
También es conveniente que los alumnos tengan la oportunidad de analizar las soluciones de una ecuación. Para ello debemos considerar situaciones en las cuales haya infinitas soluciones o las que no tienen solución, analizando en cada caso en expresiones del tipo **0 . x = 0** u **0 . x = c** con c distinto de cero, los valores posibles de la variable que permiten o no verificar las ecuaciones respectivas.

Un relativo manejo de las nociones claves sobre ecuaciones y funciones, les permitirá a los alumnos disponer de herramientas para afrontar un trabajo con **sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.** Podemos decir también que los sistemas de ecuaciones suelen ser el ámbito óptimo para profundizar en éstos conceptos; los de variable y función, nociones estructurantes del álgebra.
La idea fundamental para resolver sistemas de ecuaciones es que se puede sustituir un sistema de ecuaciones por otro más sencillo, con tal de que tenga las mismas soluciones que aquél o, lo que es lo mismo, que sea equivalente a él. Y lo interesante es que se puede construir un sistema equivalente a otro sin conocer las soluciones.

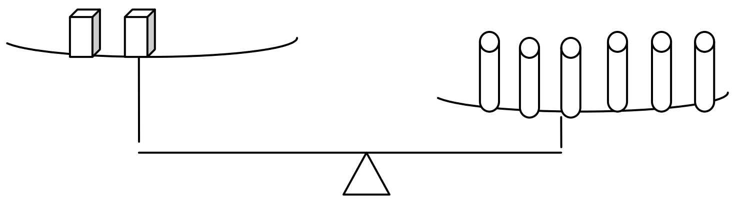
Si el concepto y la manipulación de ecuaciones de primer grado suponen una ruptura con el estilo de pensamiento previo, de carácter aritmético, el trabajo con sistemas de ecuaciones proporciona nuevas fuentes de ruptura. El problema de fondo está en la relación conceptual entre las nociones de incógnita y ecuación por un lado y las de variable y función por el otro.

Tal como lo hemos expresado con otros conceptos, no es para nada conveniente, apresurarnos a presentar los algoritmos usuales para el cálculo de sistemas (igualación, sustitución, determinantes, sumas y restas). La forma de aprender una técnica determina su posterior funcionalidad. Las técnicas aprendidas mecánicamente y descontextualizadas ¨no vendrán¨ a la mente de los alumnos cuando se los enfrente a otras situaciones que requieran su uso. Primero es necesario trabajar éstas ideas fundamentales, desde aproximaciones más intuitivas a la resolución de un sistema. Posteriormente y dotándolas de significado, estos algoritmos tendrán mejor cabida en las clases. Veamos algunas situaciones posibles, que ejemplifican el tratamiento inicial propuesto.

- *Sabiendo que la balanza A está en equilibrio, completa la balanza B para que alcance también un estado de equilibrio. ¿Hay una sola solución? Busca todas las soluciones posibles. Indica posibles valores de cada una de las pesas.*



BALANZA A



BALANZA B

- *En una librería se venden un combo de lapiceras y lápices. Tienen carteles con los siguientes precios*
3 lapiceras y 4 lápices a $27
1 lapicera y 2 lápices $ 15

En base a estos datos averigua cuánto costarán *6 lapiceras y 8 lápices*
4 lapiceras y 6 lápices

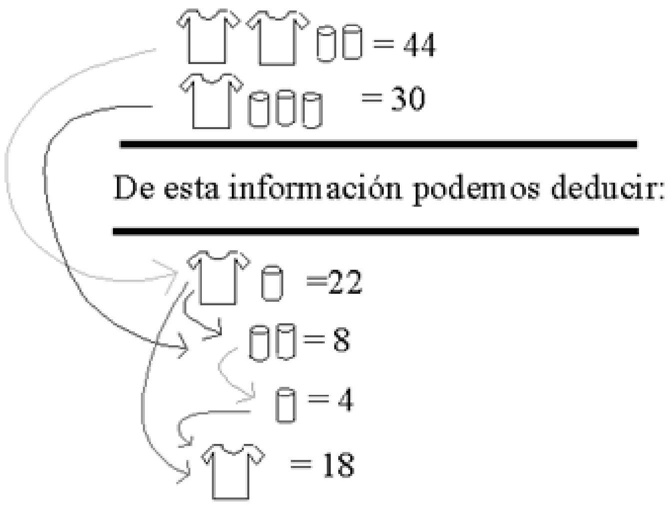
La idea es que los alumnos, dispuestos en grupo discutan alguna posible solución a las situaciones dadas. Seguramente intentarán aproximarse por diversas estrategias, tales como ensayo y error, probando con distintos números, etc... Se les puede dar ¨pistas¨ que los orienten en este primer trabajo exploratorio, como la posibilidad de considerar ambas situaciones juntas, la de operar con cada situación, multiplicándolas por un número, o sumando y/o restándolas para obtener alguna conclusión que les resulte favorable para la resolución. En estos momentos exploratorios es donde debemos poner a consideración de todos lo que cada grupo ha pensado, recuperando las estrategias y procedimientos personales que hayan surgido. Los mismos darán cuenta del acercamiento que los alumnos hayan logrado respecto a los conceptos tratados. Con la intención de arribar a diversas conclusiones se propondrá un trabajo de reflexión sobre sus producciones, volviendo sobre la situación en caso de ser necesario, hasta que den cuenta de un avance en su comprensión y resolución.

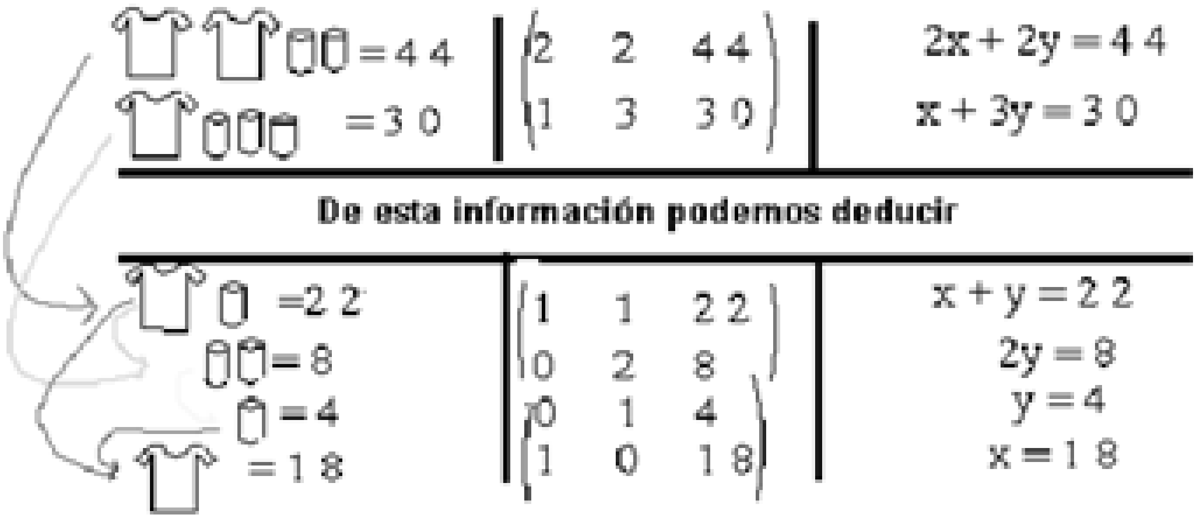
En la misma situación de la librería después de la exploración inicial, se les solicitará el valor de
1 lapicera y un lápiz
1 lápiz
1 lapicera.
Desde el punto de vista formal, lo que se hace es utilizar el hecho de que al sustituir una ecuación de un sistema por una combinación lineal de todas ellas (sin que los alumnos sepan precisamente éste concepto), el nuevo sistema es equivalente al anterior, esto es, tiene las mismas soluciones.

En un trabajo posterior se abordará la representación simbólica de las situaciones dadas. Podremos recurrir también a la representación gráfica y la expresión de los distintos tipos de soluciones que son fácilmente visualizables en las mismas. Sólo hay que tener cuidado, al presentar un sistema gráficamente de que los contextos en cuestión representen números reales y no naturales o enteros.

Veamos un ejemplo del seguimiento de una solución propuesta por Godino (2003), donde aparecen representaciones gráficas, que viabilizan también otro tipo de acceso a los sistemas.

- *El precio de dos camisetas y de dos latas de refresco es de $ 44. El precio de una camiseta y de 3 latas es de $30. ¿Cuál es el precio de una camiseta y de una lata?*





ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

El tratamiento de **la estadística y de la probabilidad**, posibilita retomar las relaciones entre las representaciones fraccionarias, decimal y el porcentaje. Las experiencias en las cuales se aborda el recuento de casos de probabilidad, dan acceso a parte del razonamiento algebraico (al considerar la variabilidad y todos los casos posibles) y particularmente al pensamiento combinatorio. Inicialmente generarán estrategias personales de conteo pretendiendo que en el tercer año logren la interpretación y el uso de las fórmulas que los caracterizan.

1º año	2º año	3º año
ESTADÍSTICA • Recolectar y organizar datos en tablas y gráficos diversos, al estudiar diversos fenómenos. • Resolver problemas de interpretación y producción de tablas y gráficos (pictograma, histograma, de barras, de línea, circulares, de puntos) analizando la conveniencia de su uso acorde a la información que se pretende representar. • Resolver situaciones de cálculo de la media aritmética y la moda estableciendo las diferencias entre un parámetro y el otro.	**ESTADÍSTICA** • Resolver problemas que involucren identificación de diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), la organización de datos y la construcción de gráficos adecuados a la información que se va a describir. • Interpretar y explicitar el significado de parámetros centrales (media, mediana y moda) y elección de los más adecuados para describir los datos en estudio. **PROBABILIDAD** • Resolver situaciones de combinatoria (permutaciones, variaciones y combinaciones) usando estrategias de conteo (diagramas de árbol o tablas de doble entrada, etc.); sin uso de fórmulas. • Resolver situaciones de frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y analizar su relación con la probabilidad teórica.	**ESTADÍSTICA** • Resolver situaciones de organización de datos tomando decisiones al estudiar un fenómeno. • Analizar el proceso de relevamiento de datos y los modos de comunicar los resultados obtenidos. • Resolver problemas de identificación de variables (discretas y continuas). • Organizar los datos para su agrupamiento en intervalos y construir gráficos adecuados a la información a describir. **PROBABILIDAD** • Explorar, producir y utilizar fórmulas sencillas de combinatoria en el cálculo de probabilidades.

Se pretende que los alumnos profundicen en los aspectos básicos del proceso estadístico y que además se incorpore la determinación y el análisis de los parámetros más usuales. Es conveniente seleccionar contextos que inviten a los alumnos a involucrarse en cada uno de los pasos que supone la estadística. Por ejemplo: tendencias en música, moda, deportes, etc. Las propuestas deben garantizar la participación activa de los alumnos en el proceso completo. En la recolección de datos, preguntarse si es factible acceder a toda la población o se debe seleccionar una muestra, qué condiciones debe reunir la muestra para responder a los criterios de fiabilidad, confiabilidad, etc.; un muestreo aleatorio, un procedimiento sesgado de muestreo, un muestreo limitado, todos ellos da lugar a importantes consideraciones. Tabular la información, elaborar distribuciones de frecuencias y realizar cálculos de la media y la moda.

Por ejemplo:

- *Calcular el promedio del peso de una muestra de niños según la edad; calcular el promedio de las calificaciones de un alumno en un trimestre; determinar el promedio, la mediana y la moda del producto de dos dados.*
- *En un lugar de Brasil se registró en una tabla la lluvia caída en un año, en cm:*

Enero	*Febrero*	*Marzo*	*Abril*	*Mayo*	*Junio*	*Julio*	*Agost.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
12	*15*	*7*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*5*	*7*	*9*

a) *Según los datos podrías determinar si el tiempo en ese lugar es húmedo o seco*
b) *Calcula la moda y el promedio. ¿Cuál es el más conveniente para describir la situación?*

- *Encuentra uno o dos valores que mejor representen el conjunto de datos dados. Sueldo en pesos de diferentes trabajadores de una misma fábrica: 4000; 5000; 3500; 4000; 5500; 5000; 55000; 3000; 4000; 48000; 4000; 4000; 55000; 5500; 4000; 4000; 5000; 4000; 4000; 3500; 4000; 4000; 3000; 55000; 5000; 5000; 4000; 4000; 4000; 4000; 3500; 4000.*

La estadística y la probabilidad son contextos portadores de significados para los números racionales y el porcentaje. La elaboración entre las frecuencias absolutas y las relativas permite profundizar las relaciones entre los números fraccionarios, los decimales y el porcentaje.

La siguiente tabla indica las preferencias entre las marcas A, B, C, y D de un producto lácteo. Determina como se pueden haber obtenido los distintos valores de frecuencias y porcentajes.

Marcas	*Frecuencia absoluta*	*Frecuencia relativa*	*Porcentaje*
A	*60*	*0,1*	*10*
B	*200*	*0,33..*	*33,33*
C	*240*	*0,4*	*40*
D	*100*	*0,1666..*	*16,66*
Total	*600*	*0,99..*	*99,99..*

Escoger el modo de representar la información que permita una lectura fácil y rápida, les implicará conocer los diferentes gráficos, las ventajas y desventajas de cada uno y su relación con el tipo de datos que se pretende representar; cada uno provoca un impacto diferente sobre la imagen de la información que se presenta y comunica un punto de vista distinto; analizar, por ejemplo que hasta el cambio en la escala de un mismo tipo de gráfico pueden alterar de forma esencial el mensaje que se comunica. En este punto toman relevancia el uso de programas de software, especialmente diseñados para el trabajo estadístico. Es necesario incorporarlos ya que proporcionan un medio rápido para organizar y presentar la información y por ende, los alumnos tendrán más tiempo para explorar la esencia de la estadística: el análisis de datos desde muchos puntos de vista, la formulación de inferencias y la construcción y validación de argumentos.

Es importante presentar situaciones que les permitan a los alumnos explorar, experimentando y simulando modelos de probabilidad. El trabajo se centrará en el uso de experimentos, para discutir ideas sobre sucesos probables, imposibles, seguros, equiprobables, independientes, excluyentes etc. Deben entender no sólo la relación entre la expresión numérica y la probabilidad de los sucesos, podrán además corroborar que la seguridad o incertidumbre varía a medida que se recogen más datos.

Es interesante proponer situaciones previas a la experimentación, donde los alumnos intenten adivinar los resultados de los sucesos; esto posibilitará la reflexión acerca de qué modo las predicciones se basan en datos y relaciones matemáticas.

Utilizarán diversas técnicas para registrar los sucesos y analizar el tipo de probabilidad; a través de tablas, diagramas de árboles, listas, o con procedimientos simples de recuento.

Algunos experimentos les permitirán confirmar que la coincidencia de los resultados obtenidos con la probabilidad teórica, depende de la cantidad de sucesos registrados, a mayor cantidad, mayor es el porcentaje de coincidencia.

Otros experimentos les permitirán verificar que algunos problemas de probabilidad no tienen solución teórica. Por ejemplo si se analiza la probabilidad que una chinche caiga con la punta hacia abajo o hacia arriba, podrán suponer que es de 1/2, pero al realizarlo descubrirán que el resultado de dicha probabilidad depende del tamaño de la cabeza y la punta de la chinche.

Veamos algunos ejemplos. En cada uno se sugiere realizar la experiencia y el recuento de casos.

- *Si lanzas un dado, indica cual es la probabilidad de que:*

a) *El resultado sea un número divisible por 2;*
b) *El resultado sea un número divisible por 3;*
c) *El resultado sea un número divisible por 2 o por 3;*
d) *El resultado sea un número divisible por 2 y por 3.*

- *Usa un juego de naipes españoles bien barajado e indica cual es la probabilidad de:*

a) *Sacar un caballo de cualquier palo;*
b) *Sacar el as de espadas;*
c) *Sacar una carta de bastos mayor que 7;*
d) *Sacar una carta de oro.*

- *Otro juego con dados. Si al tirar dos dados la suma es, 5, 6 ,7 u 8, se gana una ficha blanca, y si en cambio es 2, 3, 4,9, 10,11 ó 12, se obtiene una ficha negra.*

a) *Es equiprobable obtener una ficha blanca que una negra?*
b) *Es posible que se obtengan más fichas blancas que negras?*

c) *¿Qué sumas propondrías para que la probabilidad de obtener una ficha negra sea del 65%?*

- *Algunos aseguran que la probabilidad es un número entre 0 y 1. ¿Es verdad?¿Por qué? ¿Qué significa que sea 0? ¿Y que sea 1?*

- *En una caja hay 40 lápices rojos y 10 lápices verdes. Si se saca un lápiz de la caja sin mirar, será ganador quien adivine el color que salió. ¿Existe alguna estrategia que permita ser el ganador del juego?¿Por qué?*

RECOMENDACIONES PARA LA EVALUACIÓN

Como sabemos la evaluación es una actividad permanente que forma parte del proceso de enseñanza, es por ello que no debe ser sólo una instancia de información acerca del estado del saber de los alumnos sino una instancia de reprogramación permanente de la enseñanza. Si el trabajo que planteamos a los alumnos pretende desarrollar habilidades de producción, de comunicación, de interpretación de información, etc. entre otras y a la vez que prioriza la participación y el hacerse cargo de la resolución de problemas; el tipo de evaluación debe ser coherente con esta forma de desarrollar el área, debe brindar elementos que reorienten la tarea docente y permita al alumno conocer el estado de situación en su tarea de aprendizaje para poder ir superándose e interaccionar con los otros y con la materia.

Es muy importante que los alumnos sepan qué se espera de ellos al ser evaluado, cuál es el objetivo que persigue cada evaluación, que la calificación sólo muestra o refleja la distancia entre lo que se espera que él logré y lo que efectivamente es logrado, y que dicha actividad permitirá en forma conjunta con el docente superar los errores o reformular las prácticas que permitan un mejor acercamiento a los quehaceres propios del área.

No se debe olvidar que la aplicación de cualquier instrumento de evaluación nunca debe ser la interferencia entre los contenidos que se abordan y los objetivos que se persiguen; debe ser un diálogo enriquecedor entre alumnos, docentes y el área, el cual genere una actitud de apertura y de reflexión que permita a ambos analizar los desempeños individuales y grupales desde el lugar que cada uno ocupe. Los alumnos deben poder encontrarle un sentido a la evaluación, la misma debe ser un reflejo de cómo logran resolver las distintas situaciones problemáticas, las interacciones que se dan durante las actividades que les proponemos y los aportes que hacen, el análisis de los errores como lógica para mejorar los aprendizajes ya que son parte del acto mismo de conocer y reflejan los obstáculos que enfrenta cada individuo; de esta forma las evidencias son tangibles y comprensibles para todos los alumnos, permitiendo una evaluación auténtica que fortalece la equidad educativa respetando las necesidades educativas de cada uno, puesto que cada uno posee diferentes grados de apropiación de los quehaceres propios del área.

Otro aspecto muy importante de la evaluación son los criterios que se seleccionan para organizar el sistema de acreditación, el cual muchas veces sobrepasa y deja de lado la verdadera intencionalidad que tiene la evaluación, generando conflictos entre alumnos y docentes a la vez que obstaculiza el consenso y los acuerdos posibles. Es por ello que sería muy importante construir de forma compartida los criterios que permiten explicitar y delimitar las acciones concretas que serán evaluadas, favoreciendo la evaluación procesual no perdiendo de vista las posibilidades reales de los alumnos en los distintos momentos del aprendizaje.

Como antes mencionamos la evaluación es un proceso fundamental y complejo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, por lo cual debemos tener en cuenta algunos aspectos que nos permite darle el lugar que le corresponde:

- debe ser parte de un recorrido no el momento final del proceso porque permite avanzar en el conocimiento desde la experiencia mediante conjeturas y refutaciones aprendiendo desde nuestros errores, tomando como punto de partida los aciertos para luego aproximarse a los desaciertos los cuales nos darán información para trabajar nuevamente sobre qué es lo no sabido, dónde se origina la dificultad, en qué parte del proceso hay articulaciones no comprendidas, etc.

- debe permitir evaluar procesos y procedimientos no sólo resultados, porque ello permitirá reflexionar sobre las acciones que se llevan a cabo para llegar a la meta propuesta y analizar desde este lugar la importancia que tienen los medios que permiten el resultado correcto, es decir que no vale cualquier medio para llegar al éxito.

- debe ser un momento en el que el docente pueda observar lo aprendido por sus alumnos a la vez que es un momento de aprendizaje para él porque le permite ponerse como sujeto de conocimiento que intenta transmitir lo que sabe, saber sobre lo que no sabe y aceptar que el estudio lo habilita a desarrollar el proceso de conocer para ser luego quien a partir de sus errores, aciertos, etc. pueda acercarse al objeto del conocimiento con otra metodología la cual será beneficiosa para los alumnos. Un docente que evalúa la producción de sus alumnos con una planilla preexistente, sin respetar las diferentes formas de pensar o de resolver una situación problemática, no logra darse cuenta de que él es sujeto productor de conocimiento a la vez que es susceptible de aprendizajes, lo cual es parte de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el que está inmerso.

- debe permitir saber qué se evalúa cuando se evalúa, si el fin es saber que sabe un alumno sobre algún quehacer no se debe descuidar los aspectos externos o psicológicos que pueden perturbar a una alumno en el momento de realizar la evaluación y para ello debemos tener en cuenta estrategias que permitan despejar estas variables, somos los encargados de generar herramientas que habiliten a los alumnos a dejar de lado aspectos negativos que no muestran lo que realmente saben.

- debe ser un proceso en el que no se confunda la evaluación de un quehacer con la evaluación de una persona, es decir que el alumno que realiza la evaluación es un sujeto con historia, que piensa, que siente, etc. y espera ser tratado como un sujeto en formación no cómo alguien que equivale a una nota, a un aprobado o a un desaprobado. Es desde este lugar que somos los encargados de privilegiar la relación que el alumno logre con el conocimiento, la autoestima que el alumno logre tener ante cualquier situación problemática lo ayudará a superar cualquier traspié que enfrente durante su vida escolar o no, por ello es importante no confundir la evaluación de los alumnos con una devaluación de las personas.

La evaluación de los quehaceres matemáticos no puede estar separada de los procesos de enseñanza y de aprendizaje porque como antes expusimos ellos se retroalimentan, la evaluación juega una función de institucionalización porque permite utilizar lo que es importante del tema evaluado, dejar de lado o no lo secundario, utilizar algún tipo de algoritmo convencional o no, aplicar un procedimiento o varios, etc. es decir permite respetar este nuevo enfoque que le intentamos incorporar a la didáctica del área. Para lo cual debemos combinar una serie de instrumentos de forma adecuada que permitan analizar e interpretar los resultados de cualquier instancia de evaluación, algunos instrumentos podrían ser pruebas escritas, interrogatorios orales, participación en clases, resolución de situaciones problemáticas grupales e individuales, trabajos prácticos, registros de observación la cual no debe ser circunstancial ni general (acá es importante el registro escrito para hacer una buena cobertura de este proceso). También es muy importante tener en cuenta que las evaluaciones escritas son instrumentos que habilitarán a los alumnos a ver que no fue aprendido, en dónde están las dificultades y las fortalezas: a la vez que para el docente sea el indicador de cuáles son los contenidos que se deberían retomar y es por ello que sería interesante que este tipo de evaluaciones se le saque el peso de la acreditación para permitir un trabajo que apunte a mejorar prácticas escolares, las estrategias de trabajo áulico, entre otras cuestiones.

BIBLIOGRAFÍA

- Annie Berté, ***Matemática Dinámica***. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

- Annie Berté, ***Matemática de EGB 3 al Polimodal***, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

- Patricia Sadosky, ***Enseñar Matemática hoy***. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

- Carmen Sessa, ***Iniciación al estudio didáctico del Algebra***. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

- Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón, ***Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje***. Barcelona, Horsori, 1997.

- Ana María Bressan, y otros. ***Razones para Enseñar Geometría en la Educación Básica***, Editorial Novedades Educativas, Buenos Aires, 2000.

- Grupo Azarquiel, ***Ideas y Actividades Para Enseñar Algebra,*** Madrid, Editorial SINTESIS, 1990.

- Horacio Itzcovich. ***Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría.*** Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

- Chamorro, C., Belmonte J, ***El problema de la Medida, Didáctica de las Magnitudes Lineales***, España, Editorial SINTESIS, 1994.

- I. Segovia, E. Castro, E. Castro, L. Rico, ***Estimación en Cálculo y Medida***, Madrid, Editorial SINTESIS, 1989.

- Alsina, C y otros.: ***Invitación a la Didáctica de la Geometría,*** Madrid, Editorial SINTESIS, 1995.

- Salvador Linares, M. V. Sánchez García, ***Fracciones***, Madrid, Editorial SINTESIS, 1988.

- Godino, J.; Bernabéu C.; Castellano J, ***Azar y Probabilidad***, España, Editorial SINTESIS, 1994.

- C. Broitman., V. Grimaldi, H. Ponce, ***Estudiar Matemática 7,*** Buenos Aires, Editorial Santillana, 2007.

- C. Broitman, M. escobar, V, Grimaldi; A. Noviembre, I. Sancha, ***Matemática en sexto,*** Buenos Aires, Editorial Santillana, 2010.

- Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación, ***Cuadernos Para el Aula: Matemática 6,*** Buenos aires 2007.